

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»

## ПРОГРАММА

вступительного испытания

для поступающих в аспирантуру

Института математики и информационных технологий в 2024 г.

Направление 1.1 Математика и механика

Научные специальности

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика,

1.1.6 Вычислительная математика,

1.1.9 Механика жидкости, газа и плазмы

Специальная дисциплина

## I. Вводные замечания

Для всех поступающих в аспирантуру ИМИТ АГУ по группе научных специальностей 1.1 Математика и механика в программу экзамена по математике обязательно включаются «Вещественный и комплексный анализ», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Алгебра», «Геометрия»,

Кроме того, в программу входит дополнительный материал в соответствии со следующим списком:

1.1.2 – уравнения с частными производными;

1.1.6 – методы вычислений;

1.1.9 – гидродинамика и газовая динамика;

Необходимые для подготовки к экзамену источники указаны в каждом разделе программы. Дополнительные главы согласовываются с предполагаемым научным руководителем и соответствующей кафедрой.

Форма проведения – экзамен в письменной форме, в билет включено 3 теоретических вопроса из разных разделов. Время выполнения задания – 4 академических часа.

Максимальная оценка – 100 баллов:

отлично – 75-100;

хорошо – 50-74;

удовлетворительно – 30-49;

неудовлетворительно – 0-29.

Максимальная оценка за задание 1 составляет 30 баллов, за задания 2 и 3 – 35 баллов.

Критерии оценивания:

35 баллов (вопрос 1 – 30 баллов)	Полностью раскрытый теоретический вопрос.
25-34 балла (вопрос 1 – 20-29 баллов)	Непринципиальные пробелы в теоретическом вопросе. Отсутствие упоминаний частных случаев, неточности в формулировках.
15-24 балла (вопрос 1 – 15-19 баллов)	Теоретический вопрос с пропуском важных моментов или с заметными проблемами в логике изложения. Значительные неточности в формулировках теорем или пропуск существенных моментов в доказательствах при верных формулировках.
10-14 баллов	Теоретический вопрос с существенными пробелами или вызывающий сомнение из-

	лишней схожестью с текстами сетевых источников.
5-9 баллов	Теоретический вопрос рассмотрен фрагментарно, либо даны только формулировки.
0-4 балла	Отдельные определения из рассматриваемого теоретического вопроса.

## II. Программа вступительного экзамена в аспирантуру по группам специальностей

### 1.1 Математика и механика

#### ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

##### 1. Математический анализ

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях. Основные теоремы дифференциального исчисления, теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора. Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина, Остроградского, Стокса).

##### 2. Основы функционального анализа

Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств). Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова). Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Деви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини. Функции ограниченной вариации и интеграл Стильеса. Основные нормированные пространства, Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости. Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса - Фишера. Ряды и интегралы Фурье. Элементы теории линейных операторов. Теорема Бахана об обратном операторе. Теорема Хана - Бахана. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов. Линейные функционалы. Теорема Бахана - Штейнгауза. Теорема Рисса о представлении. Теоремы о неподвижной точке. Принцип Бахана, принцип Шаудера.

##### 3. Основы теории функций комплексного переменного

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов. Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения. Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей. Формула Кристофера - Шварца. Предельные значения интеграла типа Коши (формула Сохоцкого - Племеля). Восстановление функций аналитической функции по ее вещественной части на окружности (формула Шварца). Решение задачи Дирихле для круга (формула Пуассона).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3.
2. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и от параметров.

### 2. Общая теория линейных систем

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы. Построение общего решения. Неоднородные линейные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение  $n$ -го порядка. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### 3. Теория устойчивости

Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнения второго порядка. Собственные числа. Собственные функции. Функция Грина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

## АЛГЕБРА

### 1. Основные понятия алгебры

Алгебраические операции и алгебраические системы. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

### 2. Теория определителей

Определитель квадратной матрицы и его простейшие свойства. Поведение определителя при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях системы строк и столбцов матрицы и умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и формула для обратной матрицы. Решение крамеровых систем линейных уравнений.

### 3. Конечномерные векторные пространства

Линейная зависимость, теорема о замене, база и ранг системы векторов, размерность пространства. Изоморфизм любого конечномерного пространства некоторому пространству строк. Преобразование координат вектора при смене базы пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы и пересечения подпространств, фактор-пространства.

### 4. Системы линейных уравнений

Теорема о ранге для матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отыскание). Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений). Связь между множеством реше-

ний совместной неоднородной системы и пространством решений соответствующей однородной системы.

#### 5. Многочлены

Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неразложимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Формулы Виета и основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

#### 6. Линейные преобразования векторных пространств

Алгебра линейных преобразований пространств, изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантные подпространства, сужение преобразования на инвариантном подпространстве и индуцирование на фактор-пространстве. Собственные векторы, собственные значения и корни характеристического многочлена (спектр) линейного преобразования, теорема Гамильтона-Кэли. Корневые подпространства и корневое разложение пространства относительно линейного преобразования. Нильпотентные преобразования и их классификация. Жорданова классификация линейных преобразований и жорданова форма матриц (существование, единственность). Задача о подобии матриц. Функции от матриц, представление многочленами и ряды от матриц.

#### 7. Линейные отображения евклидовых и унитарных пространств

Аксиоматика евклидовых и унитарных пространств, длина вектора и угол между ненулевыми векторами (неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника). Процесс ортогонализации и изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств стандартным пространствам строк, ортогональное дополнение к подпространству и ортогональные разложения евклидовых и унитарных пространств. Сопряженное линейное отображение и сопряженная матрица. Эрмитовы и симметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Косоэрмитовы и кососимметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Унитарные и ортогональные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Сингулярные числа, сингулярное разложение линейного отображения и матрицы. Полярное разложение линейного преобразования матрицы.

#### 8. Квадратичные формы

Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Положительно определенные формы (критерий Сильвестра). Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. "Курс высшей алгебры". М.: Наука, 1971.
2. Мальцев А. И. "Основы линейной алгебры". М.: Наука, 1970.
3. Фаддеев Д. К. "Лекции по алгебре". М.: Наука, 1984.

4. Воеводин В. В. "Линейная алгебра". М.: Наука, 1980.
5. Кострикин А.И. "Введение в алгебру". М.: Наука, 1977.
6. Винберг Э. Б. "Курс алгебры". М.: Факториал, 1999.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

### 1. Введение

Характеристика уравнений в частных производных. Постановка задач для уравнений математической физики. Понятие о корректности постановок. Пример Адамара.

### 2. Гиперболические уравнения

Приведение к каноническому виду гиперболической системы 1-порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши и смешанная задача в квадрате для этой системы. Теорема существования и единственности. Одномерное волновое уравнение (струна). Постановка задач и формулы для их решения. Задача Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве формула Кирхгоффа. Принцип Гюйгенса. Метод спуска для получения решения двумерного волнового уравнения. Получение решения неоднородного волнового уравнения методом толчков (интеграл Дюамеля). Интеграл энергии. Теорема единственности решения задачи Коши и смешанной задачи. Априорные оценки решения волнового уравнения.

### 3. Параболические уравнения

Принцип максимума. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона решения уравнения теплопроводности по начальным значениям температуры (задача Коши). Разностный метод решения уравнения теплопроводности. Явные и неявные разностные схемы. Метод прогонки решения одномерных неявных трехточечных разностных уравнений.

### 4. Эллиптические уравнения

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Грина. Преобразование Кельвина. Разложение гармонической функции в окрестности бесконечности и в окрестности особой точки. Принцип максимума для эллиптических уравнений второго порядка. Единственность решения задачи Дирихле и задачи Неймана. Метод Перрона решения задач Дирихле. Свойства субгармонических функций Барьеры. Условия регулярности граничной точки. Свойства объемного потенциала, свойства потенциалов простого и двойного слоя. Логарифмический потенциал. Сведения задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа к интегральным уравнениям. Исследование интегральных уравнений. Краевые задачи для уравнений Лапласа в шаре и в полупространстве. Функция Грина.

### 5. Метод Фурье

Преобразование Фурье. Формула Фурье. Простейшие оценки типа вложения. Решение с помощью преобразования Фурье задачи Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. Гиперболичность, как условие корректности задачи Коши. Применение метода Фурье к реше-

нию первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Задача о колебаниях в ограниченном объеме. Схема метода разделения переменных. Решение уравнения Лапласа в пространстве методом Фурье.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000г.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972г.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983г.
4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.:Наука, 1995г.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998 г.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953г.

## **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ**

### 1. Общая топология

Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве; замыкание, внутренность и граница множества. Непрерывные отображения, гомеоморфизм. Связное множество в метрическом пространстве. Компактное метрическое пространство.

### 2. Гладкие многообразия

Дифференцируемая структура, гладкие многообразия, гладкие отображения; диффеоморфизм. Касательное векторное пространство, дифференциал гладкого отображения. Теорема об обратной функции. Подмногообразия, теорема о неявной функции. Критические точки и критические значения гладкого отображения, теорема Сарда.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука. Т.1 - 1986, т.2 - 1984.
2. Милнор Дж, Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

### 1.Элементы теории множеств и теории моделей

Множества, операции над множествами, отображения и предикаты. Мощности. Теорема Кантора. Теорема Кантора-Бернштейна. Аксиома выбора, принцип максимума (лемма Цорна), принцип полного упорядочения (теорема Цермело). Язык узкого исчисления предикатов. Модели, истинность формул на модели. Локальная теорема Мальцева, теорема Лёвенгейма-Сколема.

## 2. Исчисление предикатов

Понятие исчисления, основные проблемы. Правила вывода, понятие доказательства. Эквивалентность формул, основные эквивалентности. Теорема о существовании модели. Теорема полноты для исчисления предикатов.

## 3. Теория алгоритмов

Общерекурсивные (вычислимые) и частично рекурсивные (частично вычислимые) функции. Рекурсивные (вычислимые) и рекурсивно перечислимые (вычислимо перечислимые) множества. Универсальные частично рекурсивные (частично вычислимые) функции, построение нерекурсивного (невычислимого) рекурсивно перечислимого (вычислимо перечислимого) множества. Машины Тьюринга, универсальные машины. Нумерации совокупностей множеств и функций; нумерация Клини, нумерация Поста.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С.К. "Введение в метаматерику". М., 1957.
2. Ершов Ю.Л., Палютин М.А. "Математическая логика". М.: Наука, 1987.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. "Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов". М.: Наука, 2001.
4. Мальцев А.И. "Алгоритмы и рекурсивные функции". М.: Наука, 1965.
5. Верещагин Н.К., Шень А. "Начала теории множеств". М.: МЦНМО, 1999.
6. Верещагин Н.К., Шень А. "Вычислимые функции". М.: МЦНМО, 1999.
7. Верещагин Н.К., Шень А. "Языки и исчисления". М.: МЦНМО, 2000.

## МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

### 1. Элементы теории приближений. Интерполирование

Задача наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве. Полиномы Чебышева. Интерполяционные и квадратурные формулы. Выбор узлов интерполяции. Сплайн-интерполяции.

### 2. Численные методы линейной алгебры

Вычисление наибольшего по модулю собственного значения матрицы. Итерационные методы. Способы ускорения сходимости. Градиентные методы. Методы ортогонализации.

### 3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод Рунге - Кутты. Метод Адамса (интерполяционный и экстраполяционный). Метод предиктор-коллектор. Дифференциальное уравнение второго порядка. Факторизация. Метод прогонки. Устойчивость метода.

### 4. Численное решение интегральных уравнений

Метод моментов. Метод последовательных приближений для уравнений второго рода. Метод регуляризации для уравнений первого рода.

## 5. Численные методы решения операторных уравнений

Метод последовательных приближений. Метод UL Рунге, Галеркина. Метод наискорейшего спуска. Оценка скорости сходимости. Метод Ньютона.

## 6. Линейное программирование

Прямая и двойственная задача линейного программирования. Метод последовательного улучшения допустимого вектора. Минимизация выпуклого функционала на выпуклом множестве. Использование штрафных функций. Метод сопряженных градиентов.

## 7. Общая теория разностных схем

Аппроксимация. Аппроксимационная вязкость. Устойчивость. Достаточные признаки устойчивости. Сходимость. Теорема Лакса об эквивалентности. Вариационно-разностные схемы.

## 8. Численные методы решения задач математической физики

Гиперболические уравнения. Разностные схемы для уравнений переноса. Акустическая система. Счет в инвариантах. Схема бегущего счета. Схема Лакса. Схема Крест. Параболические уравнения. Явные и неявные схемы. Схема Кранка - Николсона. Схема-ромб. Консервативная (балансная) схема. Многомерные уравнения. Аппроксимация и сходимость для задачи Дирихле (уравнения Лапласа). Итерационные методы. Метод Рундсона. Метод переменных направлений. Методы построения экономических разностных схем для многомерных нестационарных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Н.О., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1, 2, М., 1962.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1972.
3. Рождественский Б.Л. Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
5. Рундмайер Разностные методы решения краевых задач. И.Л.1960.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
7. Фаддеев Д.К. Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Ф.М., 1963.
8. Рубинштейн Г.И. Конечномерные модели оптимизации. Новосибирск, 1970.

## ГИДРОДИНАМИКА И ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

1. Математическая модель газовой динамики. Методы Лагранжа и Эйлера описания движения среды. Траектория частиц. Интегральные законы сохранения. Термодинамические свойства. Нормальный газ. Политропный газ. Основные свойства ударных волн. Характеристики и слабые разрывы.

Специальные модели движения газа. Изентропическое, изотермическое, изобарическое движение. Модель идеальной несжимаемой жидкости. Теорема Лагранжа - Томсона. Интеграл Коши - Лагранжа. Установившееся движение. Интеграл Бернулли. Критическая скорость. Безвихревое изентропическое установившееся движение.

Групповое свойство уравнений газовой динамики. Допускаемая группа преобразований. Понятие инвариантного решения. Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости. Безвихревое движение. Формула Грина. Кинетическая энергия несжимаемой жидкости. Теорема Кельвина о минимуме кинетической энергии. Парадокс Даламбера.

Плоское безвихревое установившееся течение. Комплексный потенциал и комплексная скорость. Гидродинамическая интерпретация особых точек, формулы Блазиса - Чаплыгина. Теорема Жуковского. Применение метода конформного отображения к задаче обтекания плоского профиля произвольной формы. Условие Жуковского. Обтекание кругового и эллиптического цилиндра. Теория тонкого крыла. Струи и струйные течения идеальной жидкости. Задача о соударении 2 струй. Теория кумуляции. Истечение из сосуда. Движение системы вихрей. Сферический вихрь Хилла. Возникновение вихрей в идеальной жидкости. Теорема Бьеркинса. Неустановившиеся безвихревые движения. Гидродинамические реакции при неустановившемся движении твердого тела в жидкости Тензор присоединенных масс. Движения шара.

Волновые движения идеальной жидкости. Общая постановка задачи. Линейная теория. Волны на поверхности раздела 2 жидкостей. Неустойчивость тангенциального разрыва скоростей. Перенос энергии гравитационными волнами. Волновое сопротивление. Задачи Коши - Пуассона. Теория мелкой воды. Уединенная волна. Одномерные неустановившиеся движения газа. Одномерные движения с плоскими волнами. Характеристики. Задачи Коши. Область зависимости и область влияния. Численный расчет методом характеристик. Одномерное изоэнтропическое движение. Инварианты Римана. Простые волны. Теорема о невырожденной простой волне. Центрированная простая волна. Критерий простой волны. Градиентная катастрофа. Метод диаграммы.

Распад произвольного разрыва. 10 случаев взаимного расположения диаграмм. Задачи: ударная труба; отражение ударной волны от жесткой стенки; удар движущегося газа по неподвижному; взаимодействие ударной волны с контактным разрывом. Асимптотическое затухание ударных волн. Автомодельные решения. Задача о сильном взрыве.

Плоскопараллельные установившиеся движение политропного газа. Уравнение движения. Функция тока. Интеграл Бернулли. Классификация движений. Теория о линиях тока в безвихревом неизентропическом течении. Уравнения безвихревого установившегося движения. Уравнения для потенциала скорости. Плоскость годографа. Уравнения Чаплыгина. Задача об истечении дозвуковой струи.

Простые волны и характеристики. Годограф простой волны. Течение Прандтля - Мейера. Задача об истечении сверхзвуковой струи. Косые скачки уплотнения. Соотношение Прандтля. Обтекание клина сверхзвуковым потоком.

Околозвуковые течения. Теорема Никольского и Таганова. Поведение течения в окрестности центра. Теорема о прямой звуковой линии. Течение через сопло Лавалья. Уравнения и задачи Трикоми.

## 2. Динамика вязкой жидкости

Понятие о вязкой жидкости. Постулаты Стокса. Уравнения Навье - Стокса. Граничные условия. Диссипация энергии в вязкой жидкости. Уравнения вихря. Нереализуемость безвихревых течений. Групповые свойства Навье - Стокса. Примеры инвариантных решений. Диффузия вихревого слоя и вихревой нити. Течение Куэтта. Течение Пуазейля. Внутренняя стационарная задача. Определение обобщенного решения. Исключение и восстановление давления. Априорная оценка. Существование обобщенного решения. Единственность медленных стационарных течений. Аппроксимация Стокса. Решение внутренней задачи для уравнений Навье - Стокса методом последовательных приближений.

Постановка задачи обтекания Стокса. Парадокс Стокса. Аппроксимация Озсена.

Постановка внутренней нестационарной задачи. Обобщенные решения. Теорема единственности решения внутренней нестационарной задачи. Стационарные течения как предел нестационарных течений. Постановка задачи в теории гидродинамической устойчивости. Уравнение Орра - Зоммерфельда. Понятие о турбулентности. Гипотезы Прандтля. Преобразования Мизеса. Постановка краевой задачи в теории пограничного слоя. Задача об обтекании полубесконечной пластинки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды.
2. Кибель И.А., Кочин В.Е., Розе. Теоретическая гидродинамика. Т.1, 2.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

### 1. Дифференциальные уравнения

Автономные системы дифференциальных уравнений. Положение равновесия, предельные циклы. Устойчивость, теорема Ляпунова. Исследования Вышнеградского. Седло, узел, центр.

### 2. Уравнения математической физики

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики; основные уравнения математической физики; постановка задач. Корректность некорректно поставленных задач. Общие методы регуляризации некорректно поставленных задач. Обобщенное решение краевых задач на собственные значения для эллиптических уравнений в самосопряженной форме. Вариационные свойства собственных значений. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функции Грина для уравнения Далласа. Вариационные методы решения

краевых задач (Рица, Галеркина, наименьших квадратов). Задачи Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебания (в одномерном и многомерном случаях), фундаментальные решения. Характеристики. Понятия об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач однородными краевыми условиями для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость. Метод Фурье. Метод Галеркина.

### 3. Вычислительная математика.

Прямые методы (методы прогонки, быстрое преобразование Фурье циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно треугольный метод, метод сопряженных градиентов. Метод расщепления и переменных направлений. Оценки сходимости.

### 4. Математическое моделирование.

Основные виды научных исследований. Значение математики и вычислительной техники в научных исследованиях. Определение понятия «модель», функции моделей при проведении научных исследований. Особенности и области применения математического, машинного, натурального и полунатурального моделирования. Обоснование корректности моделей. Основы теории подобия и верификации моделей. Основные этапы моделирования. Предварительное исследование моделируемого объекта. Постановка задачи и определение типа модели. Требования к модели. Построение математической, алгоритмической и программной модели исследуемой системы. Научный, инженерный и промышленный эксперимент как средство построения или уточнения математической модели исследуемого объекта или явления. Типовая схема экспериментальных исследований. Типовые задачи исследования. Экспериментальные исследования как объект автоматизации.

### 5. Основы вычислительной техники.

Основные направления развития ЭВМ и их классификация. Перспективы развития ЭВМ. Периферийное оборудование ЭВМ и его использование. Особенности постановки и проведения машинных и полунатурных исследований моделей сложных систем на многопроцессорных и многомашинных вычислительных комплексах. Основные функции, выполняемые программным обеспечением (ПО) научных исследований. Требования, предъявляемые к ПО со стороны исследователей в период разработки программ. Динамика измерения затрат на разработку различных классов программ. Методы решения проблемы снижения трудоемкости разработки и сопровождения программ. Операционные системы: назначение, выполняемые функции. Принципы управления сетью ЭВМ. Средства программирования, обеспечивающие управление обменом информацией с объектом исследования.

### 6. Программное обеспечение математического моделирования.

Программное обеспечение информационных систем. Базы данных и их реализация. Основные модели, определяющие базу данных. Принципы построения систем управления базами данных (СУБД). Организация диалогового процесса с СУБД при проведении научных исследо-

ваний. Прикладное программное обеспечение научных исследований. Формы представления комплексов прикладных программ: библиотека, пакет прикладных программ (ППП), диалоговая система. Примеры библиотек и ППП общематематического назначения. Процедурные и непроцедурные входные языки для записи заданий для расчетов с помощью ППП. Архитектура ППП и процесс обработки входного задания. Архитектура диалоговой системы. Способы организации диалогового процесса исследований. Технология разработки комплексов прикладных программ. Структурное проектирование программ. Применение инструментальных средств разработки ППП и диалоговых систем. Программное обеспечение аналого-цифровых, графических дисплеев и средств машинной графики. Достоинство и недостатки использования проблемно-ориентированных языков моделирования. Факторы, влияющие на выбор языка. Пакеты и системы дискретного, непрерывного и дискретно-непрерывного моделирования.

#### 7. Методы проведения эксперимента.

Цели и методы планирования экспериментов. Математическая теория эксперимента: формулировка проблемы, классификация методов. Планирование регрессионных экспериментов, критерии оптимальности регрессионных планов. Планы 1-го и 2-го порядков. Последовательные методы планирования экспериментов. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. Задачи и планирование эксперимента при исследовании динамических объектов. Основные характеристики и особенности массивов информации в научных исследованиях. Размерность, качественные и количественные признаки, способы представления, механизмы и модели порождения данных, общая схема и основные этапы анализа данных.

Задача статистического оценивания параметров. Свойства статистических оценок. Методы статистического оценивания. Использование априорной информации (байесовский подход).

Статистическая проверка гипотез. Основные типы гипотез, проверяемых в ходе статистической обработки данных. Общая схема статистического критерия. Построение статистического критерия, принцип отношения правдоподобия. Характеристика качества статистического критерия. Последовательная схема принятия решения.

Методы структуризации данных. Задача классификации, механизмы порождения классификаций. Задача классификации объектов с «учителем», различные модели распознавания объектов. Задача автоматической классификации (кластер - анализ), вариационный и статистических подходы, основные типы алгоритмов, проблема выбора числа классов.

Методы структуризации параметров, модели и методы факторного анализа, алгоритмы экстремальной группировки, выбор числа групп, нелинейные модели, особенности методов структуризации качественных признаков. Методы отображения и визуализации многомерных данных, методы моделей многомерного шкалирования, особенности использования алгоритмов для различных типов данных, связь методов многомерного шкалирования и методов классификации.

Методы аппроксимации сложных зависимостей, построение прогностических и нормальных моделей. Регрессионные линейные и нелинейные модели. Методы кусочной аппроксимации.

ции зависимостей. Структурные регрессионные уравнения. Методы структурной минимизации эмпирического риска в задаче аппроксимации зависимостей.

Методы анализа экспериментальных кривых. Специфика проблемы и основные подходы к ее решению. Сегментация кривых. Машинные методы построения языка для качественного описания кривых. Автоматическая обработка изображения. Изображение как особый тип массовых эмпирических данных.

Методы первичной обработки данных. Шкалы измерений. Унифицированное представление разнотипных данных. Методы восстановления пропущенных наблюдений. Анализ резко выделяющихся наблюдений. Погрешности дискретизации и квантовая в задачах интерполяции сигналов, статистической обработки данных. Сжатие данных.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1961.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1980.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.. Методы решения некорректных задач. М.: 1974.
9. Кузмичев Д.А., Радкевич И.А., Смирнов А.Д. Автоматизация экспериментальных исследований: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1983. - С. 391.
10. Хартман К., Лецкий Э., Шефер З. и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Мир, 1977. - С. 552.
11. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. - С. 320.
12. Горский В.Г., Адлер С.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). М.: Металлургия, 1987. - С. 112.
13. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. М.: Мир, 1978.