МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор по УР
_____________ / Жданова Е.А.
«__» __________________ 20____ г.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА
по дисциплине
Геометрия и топология

Область науки
1. Естественные науки

Группа научных специальностей
1.1. Математика и механика

Научная специальность
1.1.3. Геометрия и топология

Отрасль науки
физико-математические науки

Форма обучения
очная

Барнаул 2022

Составители: д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа Родионов Е.Д.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа Хромова О.П.

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа
протокол №_1_ от «31» _08_ 2022 г.

Зав. кафедрой математического анализа ____________ А.Н. Саженков

Программа рассмотрена и одобрена на заседании Ученого совета Института математики и информационных технологий протокол №_2_ от «29» _09_ 2022 г.

Директор ИМИТ ____________ Е.В. Журавлев

СОГЛАСОВАНО:
Зав. отделом аспирантуры ____________

Зам. первого проректора по УР-начальник УМУ ____________

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Программа кандидатского экзамена по дисциплине «Геометрия и топология» (далее - программа кандидатского экзамена) разработана в соответствии с:

- Федеральным законом от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Постановлением Правительства Российской Федерации от 30 ноября 2021 г. № 2122 «Об утверждении положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре);
- Приказом Минобрнауки России от 20.10.2021 № 951 «Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)» (Зарегистрировано в Минюсте России 23.11.2021 № 65943);
- Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 24 февраля 2021 г. № 118 «Об утверждении номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, и внесении изменения в Положение о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденное приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 ноября 2017 г. № 1093»;
- Приказом Минобрнауки России от 28.03.2014 № 247 (в ред. Приказа Минобрнауки России от 05.08.2021 № 712) «Об утверждении порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня»;
- уставом ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»;
- локальными нормативными актами АлтГУ в сфере образовательной и научной деятельности.

1.2. Программа кандидатского экзамена регламентирует цель, задачи, содержание, организацию кандидатского экзамена, критерии оценки сформированности компетенций соискателя ученой степени кандидата наук, включает перечень вопросов, выносимых на кандидатский экзамен, рекомендации по подготовке к кандидатскому экзамену, в том числе перечень литературы и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для подготовки к кандидатскому экзамену.

2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

2.1. Целью проведения кандидатского экзамена является определение уровня сформированности знаний, умений, навыков по дисциплине «Геометрия и топология», а именно: возможность применять полученные знания, умения, навыки при проведении научного исследования по теме диссертационной работы.

2.2. Задача кандидатского экзамена: проверка знаний аспиранта/соискателя по следующим разделам дисциплины:

- общая топология;
- дискретная и комбинаторная геометрия;
- дифференциальная геометрия и ее приложения;
- интегральная геометрия;
- симплектическая, контактная и пуассонова геометрия конечномерных и бесконечномерных пространств;
- общая топология;
- алгебраическая топология;
- топология гладких многообразий;
- маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений;

- топология особенностей;
- теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур;
- топология и геометрия групп и однородных пространств.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Кандидатский экзамен проводится в устной форме по билетам. Экзаменуемый отвечает на 2 вопроса из типовой программы (раздел 4). Время подготовки – 4 часа. Комиссия заслушивает ответ сдающего. С учётом беседы и дополнительных вопросов выставляет общую оценку.

4. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ (ВОПРОСОВ), ВЫНЕСЕННЫХ НА КАНДИДАТСКИЙ ЭКЗАМЕН

1. Общая топология

1. Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории [7, 12, 24].
2. Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k-топология в пространстве гладких отображений) [7, 12, 24, 26].
3. Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций [7, 12, 24].
4. Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха-Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве [7, 12, 24, 26].
5. Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами [7].
6. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности [7].
7. Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность [31].

2. Алгебраическая топология

8. Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для k меньших или равных n [1, 3, 4].
9. Пространства Эйленберга-Маклейна. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H-пространства [1, 3, 4].
10. Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Двойственность Пуанкаре для многообразий [1, 3, 4, 19].
11. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна [1, 3, 4].
12. Кольцо когомологий H-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел [1, 3, 4].

13. Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана [8, 3].
14. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей [1, 3, 4].
15. Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения) [3]. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца [6].
16. Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях [1, 3, 4, 8].
17. Характеристические классы векторных расслоений [8]. Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор [3, 4, 28].

3. Топология гладких многообразий

18. Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий [1, 13].
19. Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа [1, 3, 21].
20. Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре [1]. Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления. [3, 4]. Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений.
21. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции [6].

4. Топология малых размерностей

22. Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей.
23. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла.
24. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий [3, 9, 21].

5. Дифференциальная геометрия

25. Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы [1, 11, 21, 22].
26. Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия [1, 11, 21].

27. Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли [1, 2, 21].
28. Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре [1, 15, 21].
29. Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами [1,2,21].
30. Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера-Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической [1, 21].
31. Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки [1, 2, 13].
32. Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Характеристические числа [8, 15].
33. Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма [1, 2, 8].
34. Проективная двойственность и преобразования Лежандра [5, 11].

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

35. Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур [15].
36. Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем [5, 1].
37. Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса [4, 5].

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

38. Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли.
39. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы U(n)/O(n) и U(n)/SO(n). Компактные группы Ли и биинвариантная метрика [14, 1, 22, 25].
40. Кольцо когомологий компактной группы Ли [1]. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли [27].

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

41. Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне [16].
42. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости [10].
43. Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней [11, 30, 29].

5. ПЕРЕЧЕНЬ ДОКУМЕНТОВ И МАТЕРИАЛОВ, КОТОРЫМИ РАЗРЕШАЕТСЯ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ НА КАНДИДАТСКОМ ЭКЗАМЕНЕ

При подготовке к ответу на экзаменационный билет разрешается использовать научной литературой и другими справочными материалами

6. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАНННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Уровень знаний сдающего оценивается на "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно".

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	Четкость и полнота изложения теоретического материала. Полнота и правильность решения практического задания. Степень понимания материала.	Аспирантом дан исчерпывающий ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки); дан полный развернутый ответ на теоретический вопрос билета; продемонстрировано достаточно глубокое понимание дисциплины. Аспирант самостоятельно и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, решает предложенные практические задания.
Хорошо (базовый уровень)		Аспирантом дан правильный ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки). Аспирантом дан развернутый ответ на теоретический вопрос из билета, однако, допускаются неточности в ответе. С небольшими неточностями решаются предложенные практические задания.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Аспирантом дан правильный ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки). Аспирантом дан ответ на теоретический вопрос из билета, свидетельствующий, в основном, о знании изучаемой дисциплины, но отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы. Недостаточно хорошо сформированы навыки решения типичных задач, допускаются ошибки в ответах на теоретические вопросы и при решении практических заданий
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Аспирантом не дано правильных ответов на вопрос из списка вопросов. Практические задания не выполняются. Аспирант не способен ответить на вопросы и решить задание даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

7. ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

Основная рекомендуемая литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Части 1 (Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей), 2 (Геометрия и топология многообразий) и 3 (Методы теории гомологий). — М.: Наука, 1986, 1984. (Части 1 и 2 переизданы в М.: Эдиториал УРСС, 1998.)

2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. — М.: МЦНМО, 2003.

3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

4. Новиков С.П. Топология. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Том 1, 2. — М.: Наука, 1982, 1984.

7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

8. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.

9. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. — М.: Изд-во МЦНМО, 1997.

10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

11. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. — М., Наука, 1966.

Дополнительная литература

1. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1981.

2. Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.

3. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. — М.: Наука, 1988.

4. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. — М.: Иностранная Литература,
1961.

5. Роджерс К. Укладки и покрытия. — Мир, М., 1968.

Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.

Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М.: Мир, 1972.

Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. — М.: Мир, 1969.

Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.

10.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2000.

11.Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. — Москва- Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

12.. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Том 1,2. — М.: Наука, 1981.

13.Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

14.Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрий. — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

15. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии, Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.

16.Пресли А., Сигал Г., Группы петель. — М.: Мир, 1990.

17.Атья М. Лекции по K-теории, — Мир, 1967.

18.А.Д. Александров. Выпуклые многогранники. — Изд-во Технико-Теоретической литературы. М., Л., 1950.

19.Л.А. Люстерник. Выпуклые фигуры и многогранники. — Изд-во Технико-Теоретической литературы. М., Л., 1956.
20.Федер Е. Фракталы. — Мир, М., 1991.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К СДАЧЕ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

В курсе «Геометрия и топология (кандидатский экзамен)" предусмотрено проведение консультаций для сдачи кандидатского экзамена. Итоговый контроль.
В списке вопросов выделите те, которые были рассмотрены на лекции и на практиках. Обратитесь к своим записям, выделите существенное. Для более детального изучения изучите рекомендуемую литературу. Если в списке вопросов есть те, которые не рассматривались на лекции, на практических занятиях, изучите их самостоятельно. Если есть сомнения, задайте вопросы на консультации перед экзаменом.
Продумайте свой ответ на экзамене, его логику. Убедительности ответу добавит ссылка на источник литературы, графическая иллюстрация или пример применения теоретического знания, а также уверенность и наличие авторской аргументированной позиции как будущего субъекта профессиональной деятельности.

9. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Образец экзаменационного билета для проведения кандидатского экзамена.

Билет №1

1. Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки.
2. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости.