

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»**

«Утверждаю»

Первый проректор по УР

 Е.А. Жданова

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА**

**по дисциплине**

Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

**Область науки**

1. Естественные науки

**Группа научных специальностей**

1.1. Математика и механика

**Научная специальность**

1.1.5. Математическая логика, алгебра и теория чисел

**Отрасль науки**

физико-математические науки


**Форма обучения**

очная

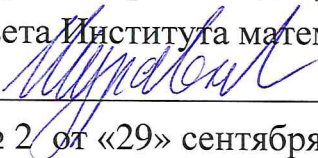
Барнаул 2022

Составители: д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и математической логики Будкин А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и математической логики Журавлев Е.В.

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры алгебры и математической логики

 \_\_\_\_\_ /Будкин А.И./  
протокол № 10 от «30» августа 2022 г.

Программа рассмотрена и одобрена на заседании ученого совета Института математики и информационных технологий

 \_\_\_\_\_ /Журавлев Е.В./  
протокол № 2 от «29» сентября 2022 г.

СОГЛАСОВАНО:

Зав. отделом аспирантуры и докторантуры \_\_\_\_\_ 

Зам. первого проректора по УР-начальник УМУ \_\_\_\_\_ 

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Программа кандидатского экзамена по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел» (далее – программа кандидатского экзамена) разработана в соответствии с:

- Федеральным законом от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Постановлением Правительства Российской Федерации от 30 ноября 2021 г. № 2122 «Об утверждении положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре);
- Приказом Минобрнауки России от 20.10.2021 № 951 «Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)» (Зарегистрировано в Минюсте России 23.11.2021 № 65943);
- Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 24 февраля 2021 г. № 118 «Об утверждении номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, и внесении изменения в Положение о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденное приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 ноября 2017 г. № 1093»;
- Приказом Минобрнауки России от 28.03.2014 № 247 (в ред. Приказа Минобрнауки России от 05.08.2021 № 712) «Об утверждении порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня»;
- уставом ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»;
- локальными нормативными актами АлтГУ в сфере образовательной и научной деятельности.

1.2. Программа кандидатского экзамена регламентирует цель, задачи, содержание, организацию кандидатского экзамена, критерии оценки сформированности компетенций соискателя ученой степени кандидата наук, включает перечень вопросов, выносимых на кандидатский экзамен, рекомендации по подготовке к кандидатскому экзамену, в том числе перечень литературы и ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для подготовки к кандидатскому экзамену.

## 2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

2.1. Целью проведения кандидатского экзамена является определение уровня сформированности знаний, умений, навыков по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Программа разработана на основе рекомендаций профильного экспертного совета Высшей аттестационной комиссии при участии МГУ им. М.В. Ломоносова.

2.2. Задача кандидатского экзамена: проверка знаний аспиранта/соискателя по следующим разделам дисциплины:

- Математическая логика и теории алгоритмов;
- Алгебра;
- Теории чисел.

## 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Кандидатские экзамены проводятся по билетам. Для подготовки ответа используют экзаменационные листы, которые сохраняются после приема экзамена в личном деле экзаменуемого.

Экзаменуемый письменно отвечает на шесть вопросов (см. п. 8 Приложение 1).

Экзамен проводится три дня. В каждый из дней экзаменуемый отвечает на два вопроса, время подготовки на один вопрос – два часа. Комиссия просматривает экзаменационные листы и с учётом беседы и дополнительных вопросов выставляет оценку по каждому из шести вопросов и общую оценку.

## 4. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ, ВЫНЕСЕННЫХ НА КАНДИДАТСКИЙ ЭКЗАМЕН

### 4.1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.



8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

## 4.2. Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$  и  $SO_3$ .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

## 4.3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.
2. Первообразные корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции.
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
11. Трансцендентность чисел  $e$  и  $\pi$ .

## 5. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Уровень знаний сдающего оценивается на "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно".

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	1. Четкость и полнота изложения теоретического материала. 2. Полнота и правильность решения практического задания. 3. Степень понимания материала.	Аспирантом дан исчерпывающий ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки); дан полный развернутый ответ на теоретический вопрос билета; продемонстрировано достаточно глубокое понимание дисциплины. Аспирант самостоятельно и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, решает предложенные практические задания.
Хорошо (базовый уровень)		Аспирантом дан правильный ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки). Аспирантом дан развернутый ответ на теоретический вопрос из билета, однако, допускаются неточности в ответе. С небольшими неточностями решаются предложенные практические задания.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Аспирантом дан правильный ответ на вопрос из списка вопросов для проверки основных знаний (без подготовки). Аспирантом дан ответ на теоретический вопрос из билета, свидетельствующий, в основном, о знании изучаемой дисциплины, но отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы. Недостаточно хорошо сформированы навыки решения типичных задач, допускаются ошибки в ответах на теоретические вопросы и при решении практических заданий.



Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Аспирантом не дано правильных ответов на вопрос из списка вопросов. Практические задания не выполняются. Аспирант не способен ответить на вопросы и решить задание даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.
---	--	--

## 6. ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

### 6.1. Основная литература:

1. М. Гэри, Д.Джонсон. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Ю.Л.Ершов, Е.А. Палютин. Математическая логика. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.
4. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. Изд. 3. М.: Наука, 1984.
5. П.С.Новиков. Элементы математической логики. Изд. 2. М.: Наука, 1973.
6. Ю.Л.Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука, 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2003.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
12. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
14. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М., Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
20. Серр Ж.П., Курс арифметики. М., Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.
22. В.А. Андрунакиевич, Ю.М. Рябухин. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.
23. Н. Джекобсон. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
24. К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
25. И. Капланский. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974.
26. И. Ламбек. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
27. К. Фейс. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, ч. I 1977; ч. II 1979.
28. И. Херстейн. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.

29. Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.
30. Р. Пирс. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
31. Н. Джекобсон. Строение колец. М.: ИЛ, 1961.
32. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, Основы теории групп, М.: Наука, 1982.
33. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, Комбинаторная теория групп, М.: Наука, 1974.
34. Х. Нейман, Многообразия групп, М.: Мир, 1969.

## **6.2. Информационно-телекоммуникационные ресурсы:**

Базы данных, Интернет-ресурсы, информационно-справочные и поисковые системы. Работа с электронными учебниками и учебными пособиями в Internet-библиотеках, в том числе: университетская библиотека Онлайн (<http://www.biblioclub.ru/>) и электронно-библиотечная система «Лань» (<http://e.lanbook.com/>).

## **7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

В курсе «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (кандидатский экзамен)» предусмотрено проведение консультаций для сдачи кандидатского экзамена. Итоговый контроль.

В списке вопросов выделите те, которые были рассмотрены на лекции и на практиках. Обратитесь к своим записям, выделите существенное. Для более детального изучения изучите рекомендуемую литературу. Если в списке вопросов есть те, которые не рассматривались на лекции, на практических занятиях, изучите их самостоятельно. Если есть сомнения, задайте вопросы на консультации перед экзаменом.

Продумайте свой ответ на экзамене, его логику. Помните, что ваш ответ украсит ссылка на источник литературы, иллюстрация практики применения теоретического знания, а также уверенность и наличие авторской аргументированной позиции как будущего субъекта профессиональной деятельности.

## **8. ПРИЛОЖЕНИЯ**

### **Приложение 1. Пример экзаменационного билета**

1. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
2. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
3. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
4. Теоремы Силова.
5. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
6. Квадратичный закон взаимности.