

**Открытая олимпиада Алтайского государственного университета «ПОКОРИ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Дистанционная олимпиада по математике «ФОРМУЛА УСПЕХА»

Максимальная итоговая оценка – 100 баллов

Условия заданий переписывать не нужно!!! Подпишите лишь номер задачи. Далее приведите обоснованное решение (очень много слов писать не стоит, но требуется пояснить самые важные моменты). Не забудьте указать ответ. Решать задачи можно в любом порядке!

Задача 1. В пустыне Кырпыкум, в ущелье среди камней есть большая лужа, в которую медленно капает вода из трещины в скале (с постоянной неизвестной пока скоростью). Если бы там собрались 103 ушастых ежа, они бы выпили всю воду ровно за 1 сутки. Если бы там собрался 21 ушастый ёж, то они бы выпили всю воду ровно за 5 суток. В этом ущелье, однако, живёт один-единственный ушастый ёж. Выпьет ли он всю воду когда-нибудь? Если да, то сколько суток ему потребуется?

Задача 2. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

$$(x^2 - 2)(x^2 - 22)(x^2 - 202)(x^2 - 2022) < 0?$$

Задача 3.

А) Найдите все решения уравнения:

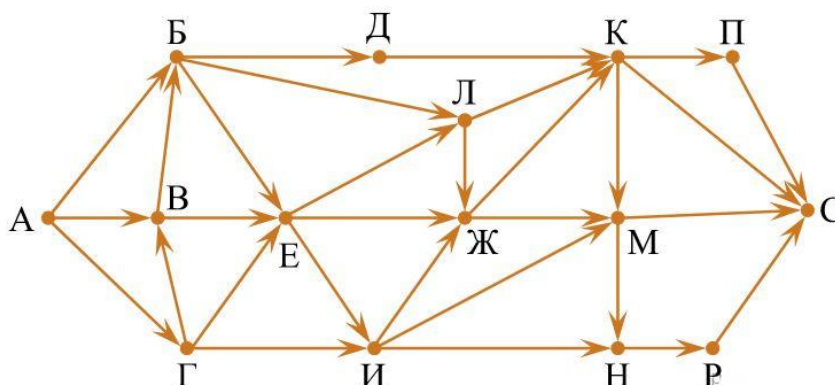
$$2x \cos(3x) - 8 \cos(3x) = 4 - x$$

Б) Определите решения уравнения из отрезка $[-0,5\pi; \pi]$.

Задача 4. У чародея семеро учеников. Он решил устроить им экзамен по предсказаниям, а за день до него предложил каждому ученику угадать, сколько его товарищей напишет экзаменационную работу без ошибок. Каждый ученик сказал "среди других учеников напишут без ошибок двое!" (про себя никто ничего не сказал). Естественно, что все, кто сдал экзамен, угадали, а все, кто не сдал, ошиблись. Сколько учеников чародея сдали экзамен? Если вариантов ответа больше одного, перечислите все и объясните ответ.

Задача 5. Найдите координаты точки на прямой $6x - 8y = 99$, которая лежит ближе всего к началу координат. Чему равно это минимальное расстояние?

Задача 6. На рисунке представлена схема дорог, связывающих пункты А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л, М, Н, П, Р, С. По каждой дороге можно передвигаться только в направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из пункта А в пункт С, проходящих через пункт В и при этом не проходящих через пункт Ж?



Образцы решений и предлагаемые критерии оценивания

Решение 1. (15 баллов) 21 ёж за 5 дней выпивает $21 \cdot 5 = 105$ порций воды. Две лишние порции воды скопились за 4 добавочных дня, таким образом в день прибывает 0,5 порции воды и один ёж выпьет всю лужу, если дать ему время. В первый день в луже 102,5 порции и ещё 0,5 прибывает к вечеру. Каждый день ёж будет выпивать добавляющиеся полпорции и половину порции из лужи, то есть чтобы выпить всё ему надо $102,5 \cdot 2 = 205$ дней.

За верный алгоритм или верное уравнение – 10 баллов.

Решение 2. (15 баллов) 66 целочисленных решений. За верную схему (алгоритм) – 10 баллов.

Схема решения в действительных числах:



Найдем число целочисленных корней в интервале $(\sqrt{2}; \sqrt{22})$ – 3 штуки, это числа {2; 3; 4}.

Аналогично в интервале $(-\sqrt{22}; -\sqrt{2})$ – 3 штуки.

Число целочисленных корней в интервале $(\sqrt{202}; \sqrt{2022})$ – 30 штук, это числа {15; 16; ...; 44}.

Аналогично в интервале $(-\sqrt{2022}; -\sqrt{202})$ – 30 штук.

Итоговое число корней = $3 + 3 + 30 + 30 = 66$.

Решение 3. (15 баллов)

За верный переход к совокупности простейших уравнений в пункте а – 5 баллов.

За обоснованный и верный ответ в пункте а – 10 баллов; в пункте б – 5 баллов.

За арифметическую ошибку при верном алгоритме решения – минус 2 балла.

$$\begin{aligned} \text{а) } 2x \cos(3x) - 8 \cos(3x) - 4 + x = 0 &\Leftrightarrow x(2 \cos(3x) + 1) - 4(2 \cos(3x) + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(2 \cos(3x) + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(3x) + 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(3x) = -0,5 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{4\}; \left\{-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}; \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

б) При помощи числовой прямой отберем корни из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:



Ответ: $-\frac{4\pi}{9}; -\frac{2\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}$.

Решение 4. (20 баллов) 3, 5 или 0 предсказателей.

В самом деле: во-первых, все могут ошибаться. Тогда предсказателей будет 0.

Если кто-то не ошибается, то возьмём одного угадавшего. Тогда из остальных двое напишут без помарок. Если наш предсказатель сам написал без помарок, то эти двое – тоже предсказатели (они назвали то же число и правы: наш предсказатель в число аккуратных входит, а говорящий себя в ответе не учитывает) и тогда предсказателей 3.

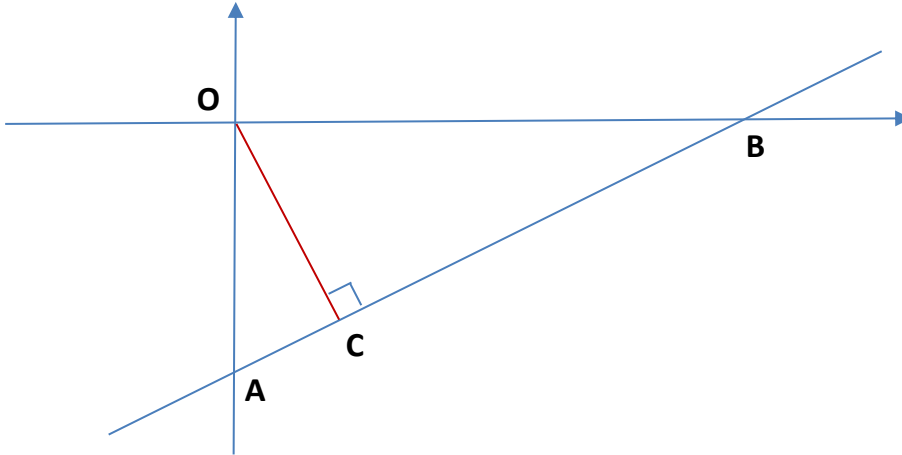
Если же наш предсказатель напишет с помарками, то эти двое не правы, а оставшиеся четверо правы, и предсказателей 5. Так как угадавший или пишет с помарками, или нет, других вариантов быть не может.

Задача простая, но с некоторым подвохом в переборе случаев. Предлагается давать не больше 10 баллов, если пропущен хотя бы один случай.

Решение 5. (15 баллов) Расстояние 9,9. Точка (5,94; -7,92).

За верную картинку и формулы для вычисления – 10 баллов.

Пусть искомая точка есть С. Тогда наименьшее расстояние R равно высоте прямоугольного треугольника OAB (см. рисунок, детализацию рисунка необходимо пояснять).

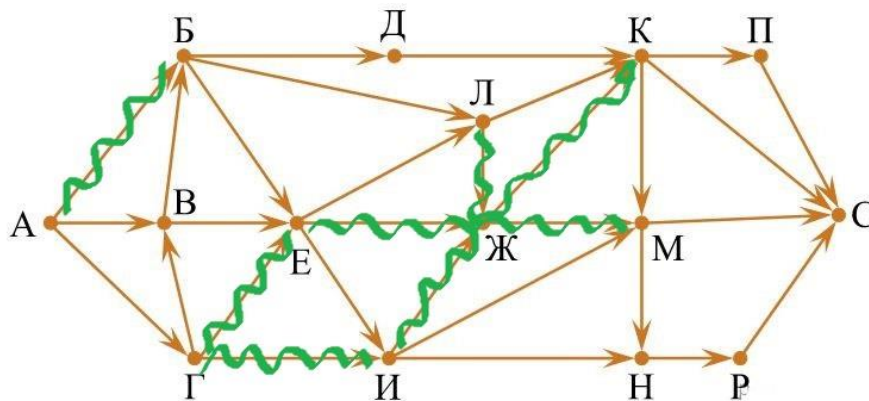


Координаты точки $C(x_0, y_0)$ можно найти, например, из системы:

$$\begin{cases} 6x_0 - 8y_0 = 99 \\ (x_0)^2 + (y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Решение 6. (20 баллов) 44 дороги.

За верную схему дорог, учитывающую условия задачи – 5 баллов.



За верный алгоритм вычисления (при наличии арифметических ошибок) – до 15 баллов.

