

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»

ПРОГРАММА

вступительного испытания

для поступающих в аспирантуру

Института математики и информационных технологий в 2024 г.

Укрупнённая группа специальностей 1.2 Компьютерные науки и информатика
направление 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Специальная дисциплина

I. Вводные замечания

Для всех поступающих в аспирантуру ИМИТ АГУ по группам научных специальностей 1.1 Математика и механика, 1.2 Компьютерные науки и информатика в программу экзамена по математике обязательно включаются «Вещественный и комплексный анализ», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Алгебра», «Геометрия»,

Кроме того, в программу входит дополнительный материал в соответствии со следующим списком:

1.2.2 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Необходимые для подготовки к экзамену источники указаны в каждом разделе программы. Дополнительные главы согласовываются с предполагаемым научным руководителем и соответствующей кафедрой.

Форма проведения – экзамен в письменной форме, в билет включено 3 теоретических вопроса из разных разделов. Время выполнения задания – 4 академических часа.

Максимальная оценка – 100 баллов:

отлично – 75-100;

хорошо – 50-74;

удовлетворительно – 30-49;

неудовлетворительно – 0-29.

Критерии оценивания задания:

35 баллов (вопрос 1 – 30 баллов)	Полностью раскрытый теоретический вопрос.
25-34 балла (вопрос 1 – 20-29 баллов)	Непринципиальные пробелы в теоретическом вопросе. Отсутствие упоминаний частных случаев, неточности в формулировках.
15-24 балла (вопрос 1 – 15-19 баллов)	Теоретический вопрос с пропуском важных моментов или с заметными проблемами в логике изложения. Значительные неточности в формулировках теорем или пропуск существенных моментов в доказательствах при верных формулировках.
10-14 баллов	Теоретический вопрос с существенными пробелами или вызывающий сомнение излишней схожестью с текстами сетевых источников.
5-9 баллов	Теоретический вопрос рассмотрен фрагментарно, либо даны только формулировки.
0-4 балла	Отдельные определения из рассматриваемого теоретического вопроса.

II. Программа вступительного экзамена в аспирантуру по группе специальностей

1.2 Компьютерные науки и информатика

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1. Математический анализ

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях. Основные теоремы дифференциального исчисления, теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора. Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина, Остроградского, Стокса).

2. Основы функционального анализа

Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств). Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова). Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Деви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини. Функции ограниченной вариации и интеграл Стильеса. Основные нормированные пространства, Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости. Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса - Фишера. Ряды и интегралы Фурье. Элементы теории линейных операторов. Теорема Бахана об обратном операторе. Теорема Хана - Бахана. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов. Линейные функционалы. Теорема Бахана - Штейнгауза. Теорема Рисса о представлении. Теоремы о неподвижной точке. Принцип Бахана, принцип Шаудера.

3. Основы теории функций комплексного переменного

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности. Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов. Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения. Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей. Формула Кристофера - Шварца. Предельные значения интеграла типа Коши (формула Сохоцкого - Племеля). Восстановление функций аналитической функции по ее вещественной части на окружности (формула Шварца). Решение задачи Дирихле для круга (формула Пуассона).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3.
2. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и от параметров.

2. Общая теория линейных систем

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы. Построение общего решения. Неоднородные линейные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение n -го порядка. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. Теория устойчивости

Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнения второго порядка. Собственные числа. Собственные функции. Функция Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

АЛГЕБРА

1. Основные понятия алгебры

Алгебраические операции и алгебраические системы. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

2. Теория определителей

Определитель квадратной матрицы и его простейшие свойства. Поведение определителя при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях системы строк и столбцов матрицы и умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и формула для обратной матрицы. Решение крамеровых систем линейных уравнений.

3. Конечномерные векторные пространства

Линейная зависимость, теорема о замене, база и ранг системы векторов, размерность пространства. Изоморфизм любого конечномерного пространства некоторому пространству строк. Преобразование координат вектора при смене базы пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы и пересечения подпространств, фактор-пространства.

4. Системы линейных уравнений

Теорема о ранге для матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отыскание). Однородные системы

(пространство решений, фундаментальные системы решений). Связь между множеством решений совместной неоднородной системы и пространством решений соответствующей однородной системы.

5. Многочлены

Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неразложимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Формулы Виета и основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Алгебра линейных преобразований пространств, изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантные подпространства, сужение преобразования на инвариантном подпространстве и индуцирование на фактор-пространстве. Собственные векторы, собственные значения и корни характеристического многочлена (спектр) линейного преобразования, теорема Гамильтона-Кэли. Корневые подпространства и корневое разложение пространства относительно линейного преобразования. Нильпотентные преобразования и их классификация. Жорданова классификация линейных преобразований и жорданова форма матриц (существование, единственность). Задача о подобии матриц. Функции от матриц, представление многочленами и ряды от матриц.

7. Линейные отображения евклидовых и унитарных пространств

Аксиоматика евклидовых и унитарных пространств, длина вектора и угол между ненулевыми векторами (неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника). Процесс ортогонализации и изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств стандартным пространствам строк, ортогональное дополнение к подпространству и ортогональные разложения евклидовых и унитарных пространств. Сопряженное линейное отображение и сопряженная матрица. Эрмитовы и симметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Косоэрмитовы и кососимметрические линейные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Унитарные и ортогональные преобразования и матрицы (определение, спектр и канонический вид). Сингулярные числа, сингулярное разложение линейного отображения и матрицы. Полярное разложение линейного преобразования матрицы.

8. Квадратичные формы

Поведение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Положительно определенные формы (критерий Сильвестра). Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. "Курс высшей алгебры". М.: Наука, 1971.
2. Мальцев А. И. "Основы линейной алгебры". М.: Наука, 1970.

3. Фаддеев Д. К. "Лекции по алгебре". М.: Наука, 1984.
4. Воеводин В. В. "Линейная алгебра". М.: Наука, 1980.
5. Кострикин А.И. "Введение в алгебру". М.: Наука, 1977.
6. Винберг Э. Б. "Курс алгебры". М.: Факториал, 1999.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Аффинные и ортонормальные системы координат

Формулы замены координат. Вычисление скалярных произведений, длин отрезков и углов.

2. Геометрические основы теории определений

Одинаково и противоположно ориентированные реперы, ориентация пространства. Вычисление объема параллелепипеда, построенного по реперу, через координаты составляющих векторов. Геометрический смысл детерминанта матрицы Грамма. Векторное и смешанное произведение в 3-мерном ориентированном евклидовом пространстве.

3. Аффинные подпространства

Задание аффинного подпространства параметрическим уравнением и системой уравнений. Существование и единственность аффинного отображения, имеющего заданные значения в заданных точках. Аффинные свойства фигур (прямолинейность, выпуклость, связность и т.п.). Инвариантные подпространства аффинных и ортогональных преобразований. Разложение аффинного отображения в произведение растяжения и ортогонального отображения.

4. Линии и поверхности 2-го порядка

Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Строение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-й степени. Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) для определения аффинного типа поверхности 2-го порядка.

5. Теория кривых

Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Крочение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.

6. Теория поверхности

Первая и вторая квадратичная форма. Универсальная связь между первой и второй квадратичными формами поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхностей и ее многомерном обобщении (римановой геометрии).

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

1. Дифференциальные уравнения

Автономные системы дифференциальных уравнений. Положение равновесия, предельные циклы. Устойчивость, теорема Ляпунова. Исследования Вышнеградского. Седло, узел, центр.

2. Уравнения математической физики

Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики; основные уравнения математической физики; постановка задач. Корректность некорректно поставленных задач. Общие методы регуляризации некорректно поставленных задач. Обобщенное решение краевых задач на собственные значения для эллиптических уравнений в самосопряженной форме. Вариационные свойства собственных значений. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функции Грина для уравнения Далласа. Вариационные методы решения краевых задач (Рица, Галеркина, наименьших квадратов). Задачи Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебания (в одномерном и многомерном случаях), фундаментальные решения. Характеристики. Понятия об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач однородными краевыми условиями для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость. Метод Фурье. Метод Галеркина.

3. Вычислительная математика.

Прямые методы (методы прогонки, быстрое преобразование Фурье циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно треугольный метод, метод сопряженных градиентов. Метод расщепления и переменных направлений. Оценки сходимости.

4. Математическое моделирование.

Основные виды научных исследований. Значение математики и вычислительной техники в научных исследованиях. Определение понятия «модель», функции моделей при проведении научных исследований. Особенности и области применения математического, машинного, натурального и полунатурального моделирования. Обоснование корректности моделей. Основы теории подобия и верификации моделей. Основные этапы моделирования. Предварительное исследование моделируемого объекта. Постановка задачи и определение типа модели. Требования к модели. Построение математической, алгоритмической и программной модели исследуемой системы. Научный, инженерный и промышленный эксперимент как средство построения или уточнения математической модели исследуемого объекта или явления. Типовая схема экспериментальных исследований. Типовые задачи исследования. Экспериментальные исследования как объект автоматизации.

5. Основы вычислительной техники.

Основные направления развития ЭВМ и их классификация. Перспективы развития ЭВМ. Периферийное оборудование ЭВМ и его использование. Особенности постановки и проведения машинных и полунатурных исследований моделей сложных систем на многопроцессорных и многомашинных вычислительных комплексах. Основные функции, выполняемые программным обеспечением (ПО) научных исследований. Требования, предъявляемые к ПО со стороны исследователей в период разработки программ. Динамика измерения затрат на разработку различных классов программ. Методы решения проблемы снижения трудоемкости разработки и сопровождения программ. Операционные системы: назначение, выполняемые функции. Принципы управления сетью ЭВМ. Средства программирования, обеспечивающие управление обменом информацией с объектом исследования.

6. Программное обеспечение математического моделирования.

Программное обеспечение информационных систем. Базы данных и их реализация. Основные модели, определяющие базу данных. Принципы построения систем управления базами данных (СУБД). Организация диалогового процесса с СУБД при проведении научных исследований. Прикладное программное обеспечение научных исследований. Формы представления комплексов прикладных программ: библиотека, пакет прикладных программ (ППП), диалоговая система. Примеры библиотек и ППП общематематического назначения. Процедурные и не-процедурные входные языки для записи заданий для расчетов с помощью ППП. Архитектура ППП и процесс обработки входного задания. Архитектура диалоговой системы. Способы организации диалогового процесса исследований. Технология разработки комплексов прикладных программ. Структурное проектирование программ. Применение инструментальных средств разработки ППП и диалоговых систем. Программное обеспечение аналого-цифровых, графических дисплеев и средств машинной графики. Достоинство и недостатки использования проблемно-ориентированных языков моделирования. Факторы, влияющие на выбор языка. Пакеты и системы дискретного, непрерывного и дискретно-непрерывного моделирования.

7. Методы проведения эксперимента.

Цели и методы планирования экспериментов. Математическая теория эксперимента: формулировка проблемы, классификация методов. Планирование регрессионных экспериментов, критерии оптимальности регрессионных планов. Планы 1-го и 2-го порядков. Последовательные методы планирования экспериментов. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. Задачи и планирование эксперимента при исследовании динамических объектов. Основные характеристики и особенности массивов информации в научных исследованиях. Размерность, качественные и количественные признаки, способы представления, механизмы и модели порождения данных, общая схема и основные этапы анализа данных.

Задача статистического оценивания параметров. Свойства статистических оценок. Методы статистического оценивания. Использование априорной информации (байесовский подход).

Статистическая проверка гипотез. Основные типы гипотез, проверяемых в ходе статистической обработки данных. Общая схема статистического критерия. Построение статистического критерия, принцип отношения правдоподобия. Характеристика качества статистического критерия. Последовательная схема принятия решения.

Методы структуризации данных. Задача классификации, механизмы порождения классификаций. Задача классификации объектов с «учителем», различные модели распознавания объектов. Задача автоматической классификации (кластер - анализ), вариационный и статистических подходы, основные типы алгоритмов, проблема выбора числа классов.

Методы структуризации параметров, модели и методы факторного анализа, алгоритмы экстремальной группировки, выбор числа групп, нелинейные модели, особенности методов структуризации качественных признаков. Методы отображения и визуализации многомерных данных, методы моделей многомерного шкалирования, особенности использования алгоритмов для различных типов данных, связь методов многомерного шкалирования и методов классификации.

Методы аппроксимации сложных зависимостей, построение прогностических и нормальных моделей. Регрессионные линейные и нелинейные модели. Методы кусочной аппроксимации зависимостей. Структурные регрессионные уравнения. Методы структурной минимизации эмпирического риска в задаче аппроксимации зависимостей.

Методы анализа экспериментальных кривых. Специфика проблемы и основные подходы к ее решению. Сегментация кривых. Машинные методы построения языка для качественного описания кривых. Автоматическая обработка изображения. Изображение как особый тип массовых эмпирических данных.

Методы первичной обработки данных. Шкалы измерений. Унифицированное представление разнотипных данных. Методы восстановления пропущенных наблюдений. Анализ резко выделяющихся наблюдений. Погрешности дискретизации и квантовая в задачах интерполяции сигналов, статистической обработки данных. Сжатие данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1961.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1980.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: 1974.
9. Кузмичев Д.А., Радкевич И.А., Смирнов А.Д. Автоматизация экспериментальных исследований: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1983. - С. 391.

10. Хартман К., Лецкий Э., Шефер З. и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Мир, 1977. - С. 552.
11. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. - С. 320.
12. Горский В.Г., Адлер С.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). М.: Metallurgia, 1987. - С. 112.
13. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. М.: Мир, 1978.