МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа

Задачник по теории вероятностей (первый семестр)

Издательство Алтайского
государственного университета
Барнаул, 2014

УДК 519.21
ББК 22.17

Задачник по теории вероятностей (первый семестр) : Метод.указания по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика". Изд-во Алт. гос. ун-та. Сост. С.В.Дронов. Барнаул, 2014. 44 с.

Приводятся задачи по курсу теории вероятностей. Разобраны более 30 примеров, сгруппированные по основным изучаемым темам. Даны необходимые таблицы. Указания предназначены для практических занятий со студентами-математиками в течение первого семестра изучения курса и студентами-физиками в течение всего курса.

1 Комбинаторика

Комбинаторикой называется математическая дисциплина, предметом которой является подсчет количества комбинаций каких-то объектов при наличии некоторых ограничений.

Пример 1. *В группе 20 человек. Сколькими способами одного студента можно отправить на стажировку в США, одного – в экспедицию на Марс, и еще одного – на строительство нового корпуса университета?*

Решение. Первого мы можем выбирать из 20 человек, второго – из 19, оставшихся после выбора первого, а третьего – из 18. Для получения ответа эти три числа необходимо перемножить. Получим 6840 способов. При этом отметим, что в этой задаче необходимо рассматривать упорядоченные наборы, т.к. при попытке одних и тех же людей поменять местами, мы получим разные способы. В решении использована сформулированная ниже теорема.

ПРИНЦИП УМНОЖЕНИЯ. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B на каждый такой выбор k способами, то выбрать пару объектов A и B с учетом порядка можно $n \times k$ различными способами.

Из этого принципа извлечем и возьмем на заметку следующий факт: если объекты A и B выбираются из одного и того же множества объектов, то, перемножая количество способов их выбора, мы учитываем тем самым порядок следования этих объектов.

Пример 2. *На группу из 20 человек лига студентов выделила 3 одинаковые путевки (бесплатно). Сколькими способами мы можем их распределить, если студент не может получать более одной путевки?*

Решение. Эта задача отличается от разобранной в первом примере тем, что здесь порядок следования студентов в списке, который в итоге будет подан в лигу, не играет роли. Тем самым, здесь способов будет меньше. Предположим, что сначала мы раздадим путевки, а затем этих же людей (пусть, например, Кондрата, Семена и Аду) отправляем по маршрутам, описанным в первом примере. Ясно, что для первого (К) имеется при этом 3 варианта, для второго (С) – два, а для последнего (А) ровно один вариант. По принципу умножения всего способов будет 6. Если первым мы укажем того, кто отправится в США, вторым на Марс, а третьим – на стройку, то эти способы будут задаватся следующими цепочками букв: КСА,КАС,СКА,САК,АСК,АКС. Итак, каждый способ решения нашей задачи превратился в 6 способов решения первой задачи. Т.о., в новой задаче в 6 раз меньше способов. Ответ: 1140 способов.

Пример 3. *Имеется n различных объектов. Сколько существует способов выбрать из них k ($k \leq n$) с учетом порядка выбора?*

Ответ: По принципу умножения, $n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Число

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

называется числом размещений из n (объектов) по k. В частном случае, если $k = n$, то $A_n^n = n!$, что обозначается P_n и называется числом перестановок из n объектов.

Пример 4. *Сколько существует способов выбрать k объектов из n, если порядок выбора объектов не важен?*

Ответ: Аналогично задаче о путевках, A_n^k/P_n. Формула ответа задает количество сочетаний из n по k, которые принято обозначать

$$C_n^k = \frac{n!}{(k!(n-k)!}.$$

Выпишем некоторые свойства сочетаний :

- C1. $C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = n.$
- C2. $C_n^k = C_n^{n-k}.$
- C3. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^n C_n^k = 0.$
- C4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$

Свойства C1, C2, C4 проверяются непосредственно, выписыванием определений левой и правой частей, свойство C3 будет доказано ниже.

Пример 5. *Сколько существует способов вынуть из полного набора 28 камней домино 2 камня так, чтобы их можно было приставить друг к другу?*

Решение. Все такие способы разобьем на две группы: 1) один из выбранных камней дубль; 2) дублей среди выбранных нет. Если у нас есть дубль, то к нему можно приставить 6 различных камней, а дублей всего 7. Итого способов первой группы $6 \times 7 = 42$. Порядок при этом не учтен, т.к. объекты-камни берутся здесь из непересекающихся множеств. Если же камень не дубль, то к нему можно приставить 10 различных недублей. Рассуждая так же, как в первой группе, получим $21 \times 10 = 210$ способов. Но при умножении мы учли порядок Поэтому в этой группе число способов следует уменьшить вдвое. Всего будем иметь $42+105 = 147$ способов. В этом решении применен

ПРИНЦИП СЛОЖЕНИЯ. Если объект A можно выбрать n способами, а объект B – k способами, и объекты выбираются из непересекающихся множеств, то выбор «или A, или B» можно осуществить $n+k$ способами.

Пример 6 (бином Ньютона). *Получить комбинаторным способом формулу для вычисления* $(a+b)^n$.

Решение: Запишем очевидное соотношение

$$(a+b)^n \;=\; (a+b)(a+b)...(a+b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k a^k b^{n-k}$$

и найдем вид коэффициентов C_k. Очевидно, что $C_0 \;=\; C_n \;=\; 1$ (слагаемые a^n, b^n встретятся в процессе раскрытия скобок по одному разу). Слагаемое вида $a^j b^{n-j}$ может получиться только так: в j скобках из n мы выбираем в качестве сомножителя a, а в остальных $(n-j)$ – b. Очевидно, что такой выбор может осуществиться C_n^j способами. Если мы учтем свойство С1 сочетаний, то окончательная формула получит вид:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^j b^{n-j}.$$

В силу этого обстоятельства сочетания иногда называют биномиальными коэффициентами. Заметим, что из формулы бинома Ньютона легко следует свойство С3. Достаточно просто положить здесь сначала $a = b = 1$, а затем $a = -1,\ b = 1$.

ЗАДАЧИ

1.(Суеверные велосипедисты). Сколько существует трехзначных чисел, не содержащих в своей десятичной записи цифры 8?

1А. Раньше автомобильный номер состоял из 4 цифр и одной буквы, сейчас из 3-х цифр и 3-х букв. Во сколько раз больше сейчас можно зарегистрировать автомобилей? А если учесть желтые номера из 2-х букв и 3-х цифр, выдаваемые автобусам?

2. Сколькими способами можно поставить две пешки на шахматную доску? А две ладьи?

2А. У одного отца было 5 яблок и 4 апельсина, причем все фрукты различны. Сколькими способами отец может выдать своему сыну 3 яблока и 2 апельсина для их немедленного поедания?

2B. Код на входной двери состоит из трех различных цифр. Сколькими способами можно задать код?

2C. В языке племени Ыуы только 2 звука. Словом является произвольная цепочка, состоящая не более, чем из четырех звуков. Сколько всего слов в языке Ыуы?

2D. Еще одно племя, носящее название Бумбум, имеет более сложно организованный язык. В нем 6 различных звуков. Каждое слово состоит ровно из шести звуков, причем хотя бы один звук в слове должен встречаться по крайней мере дважды (слова типа бббббб тоже возможны). Сколько всего слов в этом замечательном языке?

3. Сколько различных (возможно бессмысленных) слов можно получить, переставляя буквы в слове ВЕКТОР? А МАТЕМАТИКА?

3А. Сколькими способами можно расположить 3 нуля и 5 единиц в цепочку из 8 цифр?

3B. Имеется 3 красных и 4 зеленых носовых платочка. Сколькими способами можно выдать 5 из них 5 рыдающим мальчикам?

4. Сколько существует последовательностей из k нулей и n единиц ($k \leq n+1$) таких, чтобы никакие два нуля не стояли рядом?

5. На полке стоят 10 книг. Сколькими способами можно выбрать 3 из них так, чтобы никакие 2 из выбранных не стояли рядом?

6. Дрессировщик хочет вывести на арену 5 львов и 4 тигра, причем двух тигров нельзя помещать одного за другим ввиду их исключительной задиристости. Сколькими способами он сможет это сделать, если каждый зверь для него что ребенок родной?

7. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей, причем каждый из них враждует с двумя своими соседями (и только с ними). Сколько существует способов выбрать 5 рыцарей для поездки за святым Гралем так, чтобы среди них не было врагов?

7А. Шесть различных девушек взялись за руки, чтобы водить хоровод. Сколькими способами они могут это сделать, если учесть, что хоровод будет затем вращаться?

7В. Среди шести девушек, собирающихся водить хоровод, есть двое, которые очень не любят друг друга, и поэтому ни за что не встанут рядом. Сколькими способами можно составить хоровод при таком ограничении?

8. Сколько различных вымпелов по три полоски ткани можно составить из тканей 3 различных цветов? А если потребовать, чтобы при переворачивании вымпелы по-прежнему не различались?

9. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты четверым игрокам так, чтобы каждый получил по 13 карт?

10. Сколькими способами 4 черных, 4 белых и 4 синих шара можно разложить в 6 пакетов (допустимы пустые пакеты)?

10А. Какое наибольшее число различных частных производных k-го порядка может иметь дифференцируемая функция n переменных?

11. Сколькими способами можно посадить в ряд троих Кондратов, троих Семенов и троих Ад так, чтобы никакие двое тезок не сидели рядом? *трое тезок не сидели рядом?

12. Докажите свойства С1, С4 сочетаний.

2 Классическая вероятностная схема

В классической схеме предполагается, что все возможные исходы вероятностного эксперимента образуют конечное множество Ω. При этом должно быть выполнено условие равновозможности всех исходов. Если $A \subseteq \Omega$, то A является событием, а его вероятностью называем число

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где через $|.|$ обозначено число элементов соответствующего конечного множества. В задачах на этом занятии следует особое внимание уделять аккуратному построению Ω.

Пример 7. *У Смита двое детей. Какова вероятность того, что оба они мальчики?*

Решение. Правильным будет построение Ω в виде набора четырех исходов: {ММ, МД, ДМ, ДД}, поскольку необходимо соблюсти требование равновозможности. Итак, $|\Omega| = 4$, а благоприятен ровно один исход. Ответ: $1/4$.

Пример 8. *Кондрат подбрасывает 3 монеты. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы один герб?*

Ошибочное решение. Все исходы здесь могут быть описаны следующим образом: а) выпали 3 решки; б) выпали 2 герба и решка; в) выпали 2 решки и герб; г) выпали 3 решки. Всех исходов 4, благоприятных – 3. Ответ: $3/4$.

Ошибка здесь состоит в том, что, например, 3 герба падает относительно реже, чем 2 герба и решка, то есть исходы не равновозможны.

Верное **решение** 1: Пусть 0 – решка, 1 – орел. Все исходы правильно описать так:

$$\Omega = \{111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000\},$$

т.е. $|\Omega| = 8$, благоприятных исходов 7, ответ – $7/8$.

Верное **решение** 2: Заметим, что проще было считать неблагоприятные исходы. Таких в только что построенном Ω всего один – РРР. Тем самым вероятность того, что ни одного герба не выпало – $1/8$, значит вероятность того, что выпал хотя бы один – (1 - 1/8) $= 7/8$. Такой прием носит название «переход к дополнительному событию».

Пример 9. *Определить вероятность угадать 5 номеров в «Спортлото 6 из 45».*

Решение. Лотерея «Спортлото k из n» организована так: игрок зачеркивает на карточке k различных номеров из n возможных, а некоторое время спустя тиражная комиссия называет свои k номеров, которые и объявляются выигрышными.

В качестве всех возможных исходов возьмем шестерку выигрышных номеров. Очевидно, что $|\Omega| = C_{45}^6$. Для того, чтобы исход был благоприятным, надо, чтобы 5 из 6 номеров были выигрышными. Их можно выбрать C_6^5 способами. Последний, шестой, должен быть невыигрышным, т.е. выбираться из $45 - 6 = 39$ номеров. По принципу умножения благоприятных исходов будет $39C_6^5$. Ответ: $39C_6^5/C_{45}^6 \approx 0,0000287$.

ЗАДАЧИ.

13. Из слова НАУГАД наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что это буква Я? Что это гласная буква?

14. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Наугад вынимаем один шар. Какова вероятность того, что он белый? черный?

15. На шахматную доску поставлены две ладьи. Какова вероятность того, что они не бьют друг друга (не стоят ни на одной вертикали, ни на одной горизонтали)?

16. Из полного набора 28 камней домино наугад вынимаем два. Какова вероятность того, что их нельзя приставить друг к другу?

17. Подброшены две разные игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпало по одинаковому число очков? что на первой из них выпало больше, чем на второй? что выпала хотя бы одна единица?

18. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Наугад достаем два. Какова вероятность того, что они оба белые? разных цветов?

19. Подброшены 4 монеты. Какова вероятность того, что выпало ровно 2 герба? хотя бы два герба?

20. Кондрат забыл две последние цифры телефонного номера и помнит только, что они нечетные и разные. Какова для него вероятность правильно набрать номер?

21. Какова вероятность угадать 3; 4; 5 номеров в «Спортлото 5 из 36»?

22. Кондрат, Семен и еще 8 человек стоят в очереди. Какова вероятность того, что между Кондратом и Семеном ровно 3 человека?

23. Ребенок играет буквами А, А, М, М, располагая их случайным образом в ряд. Какова вероятность того, что он при этом получит слово АМАМ?

24. В лотерее участвует n билетов, из них m – выигрышные. Семен купил k билетов. Найти вероятность того, что он выиграет хотя бы на один.

25. Среди 25 экзаменационных билетов 5 хороших. Сначала один билет берет Кондрат, после него – Семен. Найти вероятность того, что Семену достался хороший билет.

25А. Среди 20 шахматистов есть два особенно сильных игрока. Для проведения турнира участников делят на две группы по 10 человек путем жеребьевки (случайно). Какова вероятность того, что эти двое попадут в одну группу?

3 Геометрическая вероятность

Предположим, что все исходы нашего эксперимента описываются точками некоторого ограниченного $\Omega \subset R^n$ (набором n параметров) и при этом все точки Ω равновозможны. Если $A \subseteq \Omega$ – измеримое множество, то полагаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(.)$ - мера Лебега соответствующего множества (длина при n=1, площадь при n=2, объем при n=3 и т.д.) и называем это число геометрической вероятностью.

Пример 10 (задача о встрече). *Кондрат и Семен условились встретиться на площади у памятника с 0^{00} до 1^{00} . При этом каждый из них, приходя в случайное время в оговоренном промежутке, ждет не более 10 мин. и, если другой не появляется, уходит. Найти вероятность их встречи.*

Решение. Условимся исход нашего эксперимента описывать парой (x, y), где x – момент появления Кондрата, а y – Семена (в минутах).

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 60\} \subset R^2$$

представляет собой квадрат. Благоприятные исходы здесь описываются неравенством $|x - y| \leq 10$, $(x, y) \in \Omega$, то есть образуют полосу $x - 10 \leq y \leq x + 10$, окружающую диагональ квадрата. Нетрудно найти, что $\mu(\Omega) = 3600$, $\mu(A) = \mu(\Omega) - 2 \times (50 \times 50)/2 = 1100$. Тем самым, $\mathbf{P}(A) = 11/36$.

ЗАДАЧИ

26. Во время бури произошел обрыв телефонного провода между 40-м и 60-м километрами трассы. Найти вероятность того, что он произошел между 50 и 55-м километрами.

27. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) бросается точка (ξ, η). Какова вероятность того, что уравнение

$$x^2 \ + \ \xi x \ + \ \eta = 0$$

имеет действительные корни?

*28. Та же задача в единичном кубе. Какова вероятность того, что уравнение

$$\xi x^2 \ + \ \eta x \ + \ \zeta = 0,$$

если (ξ, η, ζ) – координаты случайной точки единичного куба, имеет действительные корни?

29. Отрезок длины d случайным образом разделен на три части. Какова вероятность того, что из получившихся отрезков можно сложить треугольник?

30. (парадокс Бертрана). В круге радиуса R проведена случайная хорда. Найти вероятность того, что ее длина больше, чем $R\sqrt{3}$.

31. (игла Бюффона). На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся на расстоянии $2a$ друг от друга. На плоскость наудачу бросается игла длины $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну линию.

32. Какой толщины должна быть монета, чтобы она падала на ребро с вероятностью $1/3$?

33. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит a, можно составить треугольник.

34. Какова вероятность не целясь попасть в прут квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между средними линиями соседних прутьев d?

34А. Два парохода в течение суток должны подойти к одному причалу. Пароходу «Гордость Пуха»для разгрузки нужно 4 часа, а пароходу «Товарищ Пятачок»– 6 часов. С какой вероятностью ни одному из них не придется ждать освобождения причала?

34В. Крупные метеориты падают на поверхность Земли в среднем раз в месяц. Найти вероятность того, что в течение 10 лет не менее двух метеоритов упадет в область, ограниченную меридианами 30 в.д. и 60 в.д. и параллелями 40 с.ш. и 60 с.ш. Какова вероятность в течение этого времени наблюдать два крупных метеорита на территории Барнаула (площадь оценить, метеориты считать точками)?

35. В сфере радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросаны n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей из них будет не меньше, чем a.

35А. Перпендикулярно берегам канала, имеющего ширину $2L$, курсирует буксир. Ввиду сгустившегося тумана он постоянно подает сигнал, слышимый на расстоянии a от буксира. Параллельно берегу канала со скоростью v движется пароход. Считая скорость u буксира известной, найти вероятность того, что пароход минует буксир, не услышав гудка.

4 Формулы сложения и умножения

Если событие, вероятность которого надо найти, распадается в объединение (что соответствует союзу «или») или пересечение (соответствует «и») событий, вероятности которых найти проще, то мы можем применить формулу сложения

$$\mathbf{P}(A \cup B) \;=\; \mathbf{P}(A) \;+\; \mathbf{P}(B) \;- \mathbf{P}(AB)$$

или формулу умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(AB) \;=\; \mathbf{P}(A/B) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Для тех событий $A,\ B$, которые не имеют общих исходов (несовместны), имеем

$$\mathbf{P}(A \cup B) \;=\; \mathbf{P}(A) \;+\; \mathbf{P}(B).$$

Очевидно, что последнее равенство можно распространить на произвольное конечное количество слагаемых. Более того, одна из аксиом вероятности (σ-аддитивность) состоит в том, что это по-прежнему верно и для счетного числа событий. Итак, для произвольной последовательности попарно несовместных событий

$$\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Если события A, B независимы, то

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Строго говоря, это – определение независимости, так же, как формула умножения – определение условной вероятности. Но на практике эти формулы используются как следствия определений, а независимость проверяют из каких-то других (как правило, интуитивных) соображений. Условную вероятность же вычисляют, строя новое вероятностное пространство, состоящее лишь из исходов, входящих в B.

Пример 11. *Семен подбросил 2 игральные кости. Какова вероятность того, что выпала хотя бы одна единица?*

Решение 1. Введем следующие события: $A = \{$ единица на первой кости$\}$; $B = \{$единица на второй кости$\}$; $C = A \cup B = \{$выпала хотя бы одна единица$\}$. Заметим, что $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/6$, и события A, B независимы. Значит, $\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, и

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{11}{36}.$$

Решение 2. Запишем $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. При этом $\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{5}{6}$, и следовательно, $\mathbf{P}(\bar{C}) = \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{25}{36}$; $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\bar{C}) = \frac{11}{36}$.

Пример 12. *В урне 3 белых, 7 черных шаров. Кондрат и Семен по очереди вынимают по одному шару с возвращением. Выигрывает тот, кто первым достанет белый шар. Найти вероятности выигрыша для каждого, если игру начинает Кондрат.*

Решение. Введем события, связанные с j-м по порядку извлечением, $j = 1, 2, ...$ (на первом извлечении шар достает Кондрат, на втором Семен, на третьем – снова Кондрат и т.д.):

$$\begin{aligned} A_j &= \{\text{на } j\text{-м извлечении появился белый шар}\}; \\ B_j &= \{\text{на } j\text{-м извлечении появился черный шар}\}, \end{aligned}$$

а также

$$C = \{\text{выиграл Кондрат}\}; \quad D = \{\text{выиграл Семен}\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} C &= A_1 \cup (\cup_{k=1}^{\infty}(B_1...B_{2k}A_{2k+1}); \\ D &= \cup_{k=1}^{\infty}(B_1...B_{2k-1}A_{2k}), \end{aligned}$$

причем объединяемые здесь события попарно несовместны. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_1)...\mathbf{P}(B_{2k})\mathbf{P}(A_{2k+1}); \\ \mathbf{P}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_1)...\mathbf{P}(B_{2k-1})\mathbf{P}(A_{2k}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{P}(A_j) = 3/10,\ \mathbf{P}(B_k) = 7/10$ при всех j и k, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C) &= \tfrac{3}{10} \times \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{7}{10}\right)^j\right) = \tfrac{10}{17}; \\ \mathbf{P}(D) &= \tfrac{3}{10} \times \sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{7}{10}\right)^j = \tfrac{7}{17}. \end{aligned}$$

Пример 13. *Доказать формулы*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1...A_n) &= \mathbf{P}(A_n/A_1...A_{n-1}) \times \mathbf{P}(A_{n-1}/A_1...A_{n-2}) \times ... \\ &\times\mathbf{P}(A_3/A_1A_2)\mathbf{P}(A_2/A_1)\mathbf{P}(A_1), \qquad (1) \\ \mathbf{P}(\cup_{j=1}^{n}A_j) &= \sum_j \mathbf{P}(A_j) - \sum_{i<j}\mathbf{P}(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}\mathbf{P}(A_iA_jA_k) - ... \\ &+ (-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1...A_n). \qquad (2) \end{aligned}$$

Доказательство. Будем действовать по индукции. При $n = 2$ эти формулы совпадают с уже известными нам формулами сложения и умножения вероятностей. Сделаем в первой формуле индукционный шаг:

$$\mathbf{P}(A_1...A_kA_{k+1}) = \mathbf{P}(A_{k+1}/A_1...A_k) \times \mathbf{P}(A_1...A_k)$$

по формуле умножения вероятностей. Расписывая $\mathbf{P}(A_1...A_k)$ по индукционному предположению, получаем первую формулу при $n = k + 1$.

Обратимся ко второй формуле. Применим формулу сложения вероятностей:

$$\mathbf{P}((\cup_{j=1}^{n}A_j) \cup A_{n+1}) = \mathbf{P}(\cup_{j=1}^{n}A_j) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}(\cup_{j=1}^{n}A_jA_{n+1}). \quad (3)$$

Дважды применим индукционное предположение – к событиям $A_1, ..., A_n$ и к $(A_1 A_{n+1})$, ..., $(A_n A_{n+1})$. Покажем, что при этом получится вторая формула. Во-первых, все одинарные слагаемые $\mathbf{P}(A_j)$, $j = 1, ., n+1$ там есть. Во-вторых, в первом из слагаемых формулы (**??**) содержатся все двойные слагаемые нашей формулы, в которых не участвует A_{n+1}. Эти же последние слагаемые суть одинарные слагаемые последнего члена (**??**). Просматривая далее тройные, четверные и т.д. слагаемые, убеждаемся, что доказываемая формула и (**??**) совпадают.

ЗАДАЧИ.

36. В одной урне 3 белых и 7 черных шаров, в другой, наоборот, 7 белых и 3 черных. Кондрат достал из каждой урны по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый?

37. Семен и Кондрат стреляют залпом по волку. Семен попадает с вероятностью 0,3, Кондрат – с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что они попали? Как изменится вероятность этого, если охотники стреляли по два раза?

37А. На квадратное поле, разделенное на n^2 меньших квадратов, брошен точечный шарик. Вероятность попадания в каждое из малых полей задана и равна $p_{i,j}$, $i, j = 1, ..., n$. Найти вероятность попадания шарика в k-й горизонтальный ряд поля.

37В. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты картинку (короля, даму или валета) или карту пиковой масти?

38. В ящике 10 красных и 6 синих носков. Семен достает наугад 2 из них. Какова вероятность того, что они одного цвета?

39. Кондрат пришел сдавать зачет, умея решать 24 задачи из 30, которые в принципе может задать преподаватель. Какова вероятность получить зачет с первого раза, если для этого нужно решить первую же задачу, или, не решив первую, решить вторую?

40. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй 2 белых, 3 черных и 5 красных, в третьей – 5 черных и 5 красных. Из каждой урны извлечено по шару. Какова вероятность того, что хотя бы два шара одного цвета? все шары одного цвета?

41. Подводная лодка производит залп тремя торпедами по цели. Вероятность попадания каждой торпеды в цель 0.8. Найти вероятность того, что цель поражена.

42. Семен и Кондрат подбрасывают по очереди игральную кость. Выигрывает тот, у кого выпадет большее количество очков. Если выпадает поровну, игра продолжается. Найти вероятности выигрыша каждого из них.

43. Мишень состоит из трех частей: Ада, Синуса и Косинуса. Для поражения мишени необходимо поразить Ад или Синус и Косинус одновременно. Пуля, попавшая в мишень, попадает в Ад с вероятностью 0,2, в Синус и Косинус по 0,4 и может поразить только одну из частей. В мишень попали две пули. Найти вероятность ее поражения.

44. Вероятность нарваться на контролера в автобусе – 0,2. Кондрат трижды проехал в автобусе. Найти вероятность того, что он нарвался на контролера ровно один раз.

45. Два полицейских, преследуя гангстера, производят по нему залп, причем каждый попадает с вероятностью 0,3. Если гангстер остался цел, то он стреляет по каждому из полицейских, убивая каждого с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что убит ровно один полицейский.

46.(девушка спешит на свидание). Ада написала 5 писем, предварительно подготовив 5 надписанных конвертов. Заспешив на свидание, она разложила письма по конвертам случайным образом. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо было положено правильно.

5 Формулы полной вероятности и Байеса

Предположим, что событие, вероятность которого нужно найти, могло произойти в разных ситуациях. Если в действительности мы не знаем, какая из ситуаций имела место, то можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}(A) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A/H_k)\mathbf{P}(H_k).$$

Здесь предполагается, что для H_i, называемых гипотезами, справедливо

1. $\cup_{k=1}^{n} H_k \ = \ \Omega$;
2. $i \neq j \ \Rightarrow \ H_i \cap H_j \ = \ \emptyset$;
3. при произвольном j выполнено $\mathbf{P}(H_j) \ \neq \ 0$.

Если нам нужно найти $\mathbf{P}(A)$, а вероятности гипотез H_i неизвестны (но нет явных причин считать некоторые из них более возможными, чем другие), то принято полагать, что все они имеют равные шансы, т.е.

$$\mathbf{P}(H_1) \ = \ \mathbf{P}(H_2) \ = \ ... \ = \ \mathbf{P}(H_n) \ = \ \frac{1}{n} \, .$$

Естественно, что по мере получения дополнительной информации эти вероятности могут меняться. На вопрос, как именно это происходит, позволяет ответить формула Байеса:

$$\mathbf{P}(H_j/A) \ = \ \frac{\mathbf{P}(A/H_j)\mathbf{P}(H_j)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A/H_k)\mathbf{P}(H_k)}. \quad j = 1, ..., n.$$

Пример 14 (грустная история двух студентов). *Задачу* 25 *решить с помощью формулы полной вероятности.*

Решение. Положим

$$\begin{gathered} A \ = \ \{\text{второй студент взял хороший билет}\}; \\ H_1 = \{\text{первый взял хороший билет}\}; \\ H_2 = \{\text{первый не взял хорошего билета}\}. \end{gathered}$$

Очевидно, что все условия формулы полной вероятности выполнены. Далее, как нетрудно вычислить,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(H_1) \ = \ \frac{5}{25} \ = \ \frac{1}{5}; & \mathbf{P}(H_2) \ = \ \frac{20}{25} \ = \ \frac{4}{5}; \\ \mathbf{P}(A/H_1) \ = \ \frac{4}{24} \ = \ \frac{1}{6}; & \mathbf{P}(A/H_2) \ = \ \frac{5}{24}, \end{array}$$

и значит,

$$\mathbf{P}(A) \ = \ \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \ + \ \frac{4}{5} \times \frac{5}{24} \ = \ \frac{1}{5}.$$

Пример 15. *В цехе, изготовляющем болты, 45 процентов продукции изготавливает первая машина, 35 процентов вторая машина и 20 процентов третья. Известно, что первая машина дает 2, вторая 3, третья – 5 процентов брака. а) Какова вероятность того, что наугад выбранный из продукции цеха болт бракованный? б) Болт, выбранный наугад, оказался бракованным. Какова вероятность того, что он выпущен первой; второй; третьей машиной?*

Решение. а). Пусть

$$\begin{aligned} A &= \{\text{выбран бракованный болт}\}, \\ H_i &= \{\text{болт сделан } i\text{-й машиной}\}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(H_1) = 0,45,\ \mathbf{P}(H_2) = 0,35,\ \mathbf{P}(H_3) = 0,2,$$
$$\mathbf{P}(A/H_1) = 0,02,\ \mathbf{P}(A/H_2) = 0,03,\ \mathbf{P}(A/H_3) = 0,05,$$

и, по формуле полной вероятности, $\mathbf{P}(A) = 0,0295$.

б). Для ответа на этот вопрос достаточно воспользоваться формулой Байеса. Заметим, что в ее знаменателе находится уже вычисленная $\mathbf{P}(A)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_1/A) &= 0,45 \times 0,02/0,0295 \approx 0,3051, \\ \mathbf{P}(H_2/A) &= 0,35 \times 0,03/0,0295 \approx 0,3559, \\ \mathbf{P}(H_3/A) &= 0,20 \times 0,05/0,0295 \approx 0,3390. \end{aligned}$$

При этом, по сравнению с первоначальной (безусловной) вероятностью, вероятность первой гипотезы упала, второй практически не изменилась, а третьей резко выросла. Это позволяет сделать определенные практические выводы.

ЗАДАЧИ

47. В первой урне 3 белых и 7 черных, во второй 7 белых и 3 черных, в третьей – 5 белых и 5 черных шаров. Из наугад выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белый?

48. В урне 3 белых и 7 черных шаров. При перевозке урны один из шаров потеряли. Какова вероятность того, что первый же вынутый после этого из урны шар окажется белым?

49. При обследовании больного Кондрата имеется равное подозрение на одно из трех заболеваний: корь, оспа и косоглазие. Для уточнения диагноза больного бьют молоточком по колену. Известно, что больной корью при таком эксперименте возмутится с вероятностью 0,2, оспой – с вероятностью 0,1, косоглазием с вероятностью 0,9. Кондрат возмутился очень громко. Чем же вероятнее всего болен Кондрат?

49А. Подброшено три игральные кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпали шестерки, если а) на первой кости выпало 6 очков;

б) по крайней мере на одной кости выпало 6 очков; в) ровно на одной кости выпало 6 очков.

49В. В группе 5 отличников, 10 хороших и 15 слабых студентов. Отличник всегда получает «отлично», хороший студент – «отлично»и «хорошо» одинаково часто, а для слабого студента одинаковы шансы получить «хорошо», «удовлетворительно» и «неуд». С какой вероятностью наугад выбранный студент получит оценку «отлично»? «хорошо»?

50. 5 процентов всех мужчин и 0,25 процента всех женщин страдают дальтонизмом. Наугад выбранное лицо – дальтоник. Какова вероятность того, что это мужчина?

51. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую, не глядя, перекладывают 2 шара. Найти после этого вероятность вынуть белый шар из второй урны.

52. В первой урне, как всегда, 3 белых и 7 черных шаров, а во второй 7 белых и 3 черных. Из первой урны берут один шар, из второй два и кладут 3 выбранные шара в пустую урну. Найти вероятность вынуть белый шар из третьей урны.

53. (шутка). В урне n шаров, причем насчет их цветов ничего не известно. Найти вероятность вынуть белый шар из этой урны.

54. Для поиска самолета, потерпевшего аварию в районе A (с вероятностью 0,3) или в районе B (с вероятностью 0,7) выделено 10 вертолетов. Каждый из вертолетов, производя поиск независимо от остальных, обнаруживает самолет в своем районе, если он действительно там был, с вероятностью 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам A и B, чтобы вероятность обнаружить самолет была бы наибольшей?

55. Рабочий обслуживает n станков, расположенных в ряд с шагом 1 метр. Найти вероятность того, что в следующий раз для того, чтобы обслужить вышедший из строя станок, ему придется пройти k метров.

55А. В одном шаге от пропасти стоит пьяница, который делает шаг к пропасти с вероятностью p, а от нее с вероятностью $1-p$. Эта ситуация сохраняется на каждом последующем шаге, если только он не попал в пропасть. Найти вероятность того, что пьяница упадет-таки в пропасть, возможно, совершив достаточно большое число шагов.

*56. Пусть события H_1 ,..., H_n удовлетворяют условиям формулы полной вероятности, некоторая величина ξ может принимать одно из значений $x_k,\ k=1,2,...$ Обозначим

$$p_k \;=\; \mathbf{P}(\xi = x_k),\; p_{i,k} \;=\; \mathbf{P}(\xi = x_k/H_i), \quad k=1,2...,\; i=1,...,n.$$

Определим
$$\mathbf{M}\xi \ = \ \sum_k x_k p_k; \quad \mathbf{M}(\xi/H_i) \ = \ \sum_k x_k p_{i,k}.$$
Доказать, что
$$\mathbf{M}\xi \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\xi/H_k)\mathbf{P}(H_k).$$
Эту формулу называют формулой полного математического ожидания.

6 Схема Бернулли

Со схемой Бернулли мы сталкиваемся, проводя повторные независимые испытания с двумя исходами, один из которых условно называется успехом. Если вероятность успеха при проведении одного испытания p одинакова во всех испытаниях, то для нахождения вероятности $\mathbf{P}_n(k)$ ровно k успехов в n испытаниях имеет место формула Бернулли:
$$\mathbf{P}_n(k) \ = \ C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где}\, q \ = \ 1-p.$$
При больших n, малых p и небольших k для приближенных вычислений применяется теорема Пуассона:
$$\mathbf{P}_n(k) \ \approx \ \frac{(np)^k}{k!}\, e^{-np}.$$

Теорема обычно применяется при $0 < np < 9$. Таблицы правой части этой формулы приведены ниже.

Если $n \to \infty$, $k - np \to \infty$, то при некоторых дополнительных условиях имеет место локальная предельная теорема Муавра-Лапласа:
$$\mathbf{P}_n(k) \ \approx \ \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \varphi(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \ -$$
плотность стандартного нормального распределения, таблицы которой также приводятся.

Допустим теперь, что нам нужно подсчитать вероятность не фиксированного числа, а целого интервала успехов. Тогда удобно для приближения точной формулы
$$\mathbf{P}(s \le k \le m) \ = \ \sum_{k=s}^{m} \mathbf{P}_n(k)$$

Таблица 1

Значения $\lambda^m e^{-\lambda}/m!$

m, λ	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
0	0,8187	0,6703	0,5488	0,4493	0,3689	0,1353
1	0,1638	0,2681	0,3293	0,3595	0,3679	0,2707
2	0,0164	0,0536	0,0988	0,1438	0,1839	0,2707
3	0,0011	0,0072	0,0198	0,0383	0,0613	0,1804
4	0,0001	0,0007	0.0030	0,0077	0,0153	0,0902

m, λ	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003
1	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027
2	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107
3	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286
4	0,1680	0,1954	0,1755	0,1839	0,0912	0,0572

Таблица II

Значения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,0	0,3989	0,8	0,2897	1,7	0,0940	2,5	0,0175
0,1	0,3970	0,9	0,2661	1,8	0,0790	2,6	0,0136
0,2	0,3970	1,0	0,2420	1,9	0,0656	2,7	0,0104
0,3	0,3814	1,1	0,2179	2,0	0,0540	2,8	0,0079
0,4	0,3683	1,2	0,1942	2,1	0,0440	2,9	0,0060
0,5	0,3521	1,3	0,1714	2,2	0,0355	3,0	0,0044
0,6	0,3332	1,4	0,1497	2,3	0,0283	3,1	0,0033
0,7	0,3123	1,5	0,1295	2,4	0,0224	3,2	0,0024
0,8	0,2897	1,6	0,1109	2,5	0,0175	3,3	0,0017

использовать интегральную предельную теорему Муавра-Лапласа:

$$\mathbf{P}\left(a \le \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-x^2/2\}\, dx -$$

функция стандартного нормального распределения, наиболее характерные значения которой приводятся ниже в таблице.

Таблица III

Функция стандартного нормального распределения $\Phi(x)$

x	-3,10	-3,00	-2,58	-2,50	-2,33	-2,00
$\Phi(x)$	0,0010	0,0013	0,0050	0,0068	0,0100	0,0228
x	-1,64	-1,50	-1,28	-1,00	-0,50	0,00
$\Phi(x)$	0,0500	0,0668	0,1000	0,1587	0,3085	0,500

При этом $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, и функция Φ монотонно возрастает.

Пример 16. *Подброшены две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы одна единица?*

Решение. Испытание состоит в подбрасывании одной кости. Успехом назовем выпадение единицы. Итак, в формуле Бернулли надо положить $n = 2,\ k = 1, 2,\ p = 1/6,\ q = 5/6$. Искомая вероятность равна $\mathbf{P}_n(1) + \mathbf{P}_n(2) = 11/36$. Можно было также дать другое решение, переходя к дополнительному событию.

Пример 17. *В среднем в одном кубометре воздуха содержится 100 микробов. Берем на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в пробе будет обнаружен хотя бы один микроб.*

Решение. В качестве испытания рассмотрим изучение малого объема Δv см^3 воздуха. Этот объем выберем настолько малым, что попадание в него одновременно двух и более микробов можно считать невозможным событием. Успехом назовем обнаружение микроба в объеме Δv. Итак, получаем схему Бернулли с параметрами

$$n \;=\; \frac{2000}{\Delta v}; \quad p \;=\; \Delta v \cdot 10^{-4}, \quad k \geq 1.$$

Точное решение имеет вид

$$Q \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_n(k) \;=\; 1 - \mathbf{P}_n(0) \;=\; 1 - (\Delta v \times 10^{-4})^{2000/\Delta v}.$$

Например, при $\Delta v = 1$ имеем $Q \;=\; 1 - 0,9999^{2000}$. Очевидно, что вычислить точное значение такой вероятности достаточно трудно. Согласно теореме Пуассона при произвольном выборе Δv

$$\mathbf{P}_n(0) \;\approx\; \frac{0,2^{\,0}}{0!} e^{-0,2} \;\approx\; 0,8187,$$

а значит, $Q \approx 0,1813$. При этом применение предельной теоремы законно, поскольку, выбирая Δv достаточно малым, мы можем сделать n сколь угодно большим. Для справки приведем точное значение: $Q = 0,181277$.

Пример 18. *Между двумя городами ежедневно проезжают поездом 1000 человек. Учитывая, что имеющийся поезд часто переполняется, запускают новый. Какой вместимостью должен обладать вновь запускаемый поезд, если отказ в предоставлении места можно допустить в среднем не чаще, чем в одном случае из ста?*

Решение. Пусть k – искомое число мест, ξ – количество пассажиров, пожелавших ехать нашим поездом. Отказ в предоставлении места происходит в случае $\xi > k$. Итак,

$$\mathbf{P}(\xi > k) \;\leq\; 0,01.$$

Поскольку ξ – число успехов при проведении 1000 испытаний Бернулли, и можно для простоты считать, что вероятность успеха $1/2$, то

$$\mathbf{P}(\xi > k) \;=\; \mathbf{P}\left(\tfrac{\xi - np}{\sqrt{npq}} > \tfrac{k - 1000\cdot 1/2}{\sqrt{1000\cdot 1/2\cdot 1/2}}\right) \;\approx$$

$$\approx\; 1 - \Phi\left(\tfrac{k-500}{10\sqrt{5}}\right) \;= \Phi\left(\tfrac{500-k}{10\sqrt{5}}\right) \leq\; 0,01.$$

По таблице III находим

$$\frac{500-k}{10\sqrt{5}} \le -2,33 \quad \Rightarrow \quad k \ge 553.$$

Пример 19. *При 10000 подбрасываниях монеты герб выпал 5200 раз. Можно ли считать, что герб и решка в среднем падают одинаково часто, т.е. монета симметрична?*

Решение. Предположим, что монета симметрична. Рассмотрим схему Бернулли из 10000 испытаний-подбрасываний. Успех – выпадение герба. Тогда вероятность получения 5200 успехов по локальной предельной теореме вычисляется как

$$\mathbf{P}_{10000}(5200) \approx \frac{1}{\sqrt{2500}}\,\varphi\left(\frac{5200-10000\times 1/2}{\sqrt{2500}}\right) = \frac{\varphi(4)}{50} \approx 4\cdot 10^{-6},$$

и, более того,

$$\mathbf{P}(k \ge 5200) = \mathbf{P}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \ge 4\right) \approx 1-\Phi(4) \approx 3.18\cdot 10^{-5},$$

т.е. предположение о симметричности монеты приводит к очень малой вероятности события, который мы наблюдаем. В этом случае говорят, что рассматриваемая гипотеза вошла в противоречие с опытными данными. Поэтому монету следует считать несимметричной.

Еще раз отметим, что важнейшим условием применимости схемы (и формулы) Бернулли является неизменность вероятности успеха p при переходе от испытания к испытанию. Например, если производится выемка шаров из урны, и успехом мы называем появление белого шара, то для применимости излагаемой теории необходимо, чтобы после каждого извлечения шар возвращался бы обратно, и содержимое урны тщательно перемешивалось. Такая схема извлечения называется «извлечение с возвращением» или возвратная схема. Если же шар не возвращается (безвозвратная схема), то вероятность извлечения белого шара своя на каждом шаге, и схема Бернулли неприменима.

ЗАДАЧИ

57. Кондрат подбрасывает монету, Семен наблюдает. Если падает герб, выигрывает Кондрат, решка – Семен. Что более вероятно для Кондрата – выиграть 3 партии из четырех или 5 из 8? Не менее трех партий из четырех или не менее 5 из 8?

58. Наблюдениями установлено, что в сентябре бывает в среднем 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно выбранных в этом месяце 8 дней ровно 3 дождливые?

59. Для прядения смешаны белый и окрашенный хлопок в отношении 1:3. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон обнаружить менее двух окрашенных?

60. В условиях задачи 49 Кондрата ударили молоточком трижды и дважды он возмутился. Какова вероятность того, что он болен корью?

61. Семен на охоте стреляет по зайцам. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти вероятность того, что пятым выстрелом он убьет третьего зайца.

62. Кондрат носит с собой две коробки спичек и для прикуривания пользуется наугад выбранной коробкой. Найти вероятность того, что, когда он в первый раз достанет пустую коробку, во второй останется ровно k спичек. Первоначально в каждой из коробок было n спичек, $n \geq k$.

*63. Найти наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

64. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле – 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наиболее вероятное число попаданий было бы равно 20?

65. Каждую секунду на дороге оказывается хотя бы один автомобиль с вероятностью p. Кондрату для перехода необходимо 3 с. Найти вероятность того, что ему придется ждать ровно 4 с.; ровно 5 с.

66. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты произойдет обрыв на четырех веретенах.

67. На телефонный коммутатор поступает в среднем 60 вызовов в час. Телефонистка отлучилась на 30 секунд. Какова вероятность того, что за это время не поступит ни одного вызова ?

68. В пункте А находится телефонная станция, в пункте Б пять ее абонентов. Каждый абонент независимо от остальных занимает линию

в среднем 6 минут в час. Сколько линий нужно проложить между А и Б так, чтобы абонент мог в любой момент дозвониться до станции с вероятностью, не меньшей 0,95? не меньшей 0,99?

69. В первые классы должно быть принято 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 100 мальчиков, если вероятность появления девочки – 0,485.

70. Подбросили 100 монет. Найти вероятность того, что выпало от 45 до 55 гербов.

71. Производство дает 1 процент брака. Какова вероятность того, что из 1100 изделий бракованных окажется не более 17?

72. Сколько нужно произвести бросаний монеты, чтобы с вероятностью 0,9 ожидать отклонения частости выпадения герба от (теоретической) вероятности на абсолютную величину, меньшую 0,01?

73. Вероятность p события А неизвестна. Сколько нужно произвести опытов для того, чтобы частость появления А в этой серии опытов дала гарантированную оценку p с точностью 0,001 с вероятностью 0,99? При каком p нужно будет произвести наибольшее в среднем количество опытов? *Указание*: использовать неравенство $p(1-p) \leq 1/4$ (предварительно докажите).

74. Игральную кость подбрасывают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число выпадений шестерки заключено с вероятностью, не меньшей 0,99.

75. Театр вмещает 1000 зрителей и имеет два входа, возле каждого из которых расположен гардероб. Какую вместимость должен иметь каждый из гардеробов, чтобы с вероятностью 0,9 каждый из зрителей мог раздеться у того входа, в который вошел? Как изменится ответ, если зрители ходят только парами?

7 Случайные величины

Случайной величиной на вероятностном пространстве $< \Omega\,, \mathfrak{F}\,, \mathbf{P} >$ называется отображение $\xi : \Omega \to R$ со свойством $\mathfrak{F}$-измеримости:

$$\forall x \in R \ \{\omega \in \Omega \ : \xi(\omega) \ < \ x\} \ \in \ \Im.$$

Функцией распределения случайной величины ξ называется

$$F(x) \ = \ \mathbf{P}(\xi < x).$$

Для того, чтобы произвольная функция $F(x)$ была бы функцией некоторого распределения, необходимо и достаточно, чтобы

- $x < y \ \Rightarrow \ F(x) \ \leq \ F(y)$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \ = \ 0; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \ = \ 1$;
- $(\forall x_0) \lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) \ = \ F(x_0)$.

Говорят, что случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает лишь конечное или счетное количество значений. Дискретные случайные величины принято задавать рядом распределения:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

.

Здесь $p_j \ = \ \mathbf{P}(\xi = x_j), \ j = 1, 2, ..., n; \ \sum p_j \ = \ 1.$

Если нашлась такая неотрицательная функция p, что при каждом x

$$F(x) \ = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

то говорят, что F (а также ξ) абсолютно непрерывна, а $p(t)$ называют плотностью. Функция p является плотностью некоторого распределения тогда и только тогда, когда выполнены два свойства

1. $\forall t \ p(t) \ \geq \ 0$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)dt \ = \ 1$.

Если F – функция распределения, а p – его плотность, то почти при всех x выполнено равенство $F'(x) \ = \ p(x)$.

Пример 20. *Построить функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания при одном броске 0,4.*

Решение. Пусть ξ – число попаданий. Очевидно, что это дискретная случайная величина, причем

$$\mathbf{P}(\xi \ = \ k) \ = \ C_3^k 0,4^k 0,6^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

поэтому ряд распределения ξ имеет приводимый ниже вид.

ξ	0	1	2	3
	0,216	0,432	0,288	0,064

Нетрудно заметить, что отсюда следует

$$x \le 0 \Rightarrow F(x) = 0;$$
$$0 < x \le 1 \Rightarrow F(x) = \mathbf{P}(\xi = 0) = 0,216;$$
$$1 < x \le 2 \Rightarrow F(x) = \mathbf{P}(\xi = 0) + \mathbf{P}(\xi = 1) = 0,648;$$
$$2 < x \le 3 \Rightarrow F(x) = \mathbf{P}(\xi = 0) + \mathbf{P}(\xi = 1) + \mathbf{P}(\xi = 2) = 0,936;$$
$$x > 3 \Rightarrow F(x) = 1.$$

После этого не составит никаких затруднений и построение графика.

Пример 21. *Пусть плотность распределения случайной величины ξ задана формулой*

$$p(x) = \begin{cases} x^2, & \text{когда} \quad 0 \le x \le A, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определить константу A и найти распределение ξ^2.

Решение. Постоянная A определяется из условия 2 для плотности:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \int_0^A x^2 dx = \frac{A^3}{3} \Rightarrow A = \sqrt[3]{3}.$$

Найдем функцию распределения ξ^2 . Пусть $x > 0$.

$$\mathbf{P}(\xi^2 < x) = \mathbf{P}(|\xi| < \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} p(t)dt = \int_0^{\sqrt{x}} p(t)dt.$$

Возникает два случая:

$$0 \le \sqrt{x} \le \sqrt[3]{3} \Rightarrow \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \int_0^{\sqrt{x}} t^2 dt = \tfrac{1}{3} x^{3/2};$$

$$\sqrt{x} > \sqrt[3]{3} \Rightarrow \mathbf{P}(\xi^2 < x) = \int_0^{\sqrt[3]{3}} t^2 dt = 1.$$

Итак,

$$G(x) \;=\; \mathbf{P}(\xi^2 < x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{3}x^{3/2}, & 0 < x < \sqrt[3]{9}, \\ 1, & x \ge 3\ . \end{cases}$$

Плотность этого распределения имеет вид

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 0, \text{ когда } x \le 0 \text{ или } x > \sqrt[3]{9}, \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пример 22. *Найти функцию распределения случайной величины ξ в предыдущем примере.*

Решение. Будем использовать определение плотности. Возможны следующие случаи:

1. $x \le 0 \;\Rightarrow\; p(t) = 0$ при $t < x$, откуда $F(x) \;=\; 0$;
2. $0 < x \le \sqrt[3]{3} \;\Rightarrow\; F(x) \;=\; \int\limits_0^x t^2 dt \;=\; x^3/3$;
3. $x > \sqrt[3]{3} \;\Rightarrow\; F(x) \;=\; \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} p(t)dt \;=\; 1.$

ЗАДАЧИ

76. Из партии в 25 изделий, среди которых 6 бракованных, выбираются наугад 3. Построить функцию распределения числа бракованных изделий среди выбранных.

77. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \;<\; 2, \\ (x-2)^2, & 2 \;\le\; x \;<\; 3. \\ 1, & x \;\ge 3. \end{cases}$$

Найти плотность ее распределения и вероятность выполнения неравенства $1 \;\le\; \xi \;\le\; 2,5$.

78. Функция распределения задана формулой

$$F(x) \;=\; A \;+\; B \operatorname{arctg} x.$$

Найти коэффициенты A и B и вероятность попадания соответствующей случайной величины в интервал [-1,1].

79. Плотность распределения случайной величины ξ равна

$$p(t) \; = \; \frac{A}{e^t \; + \; e^{-t}}.$$

Найти коэффициент A и вероятность того, что при двух независимых наблюдениях ξ примет значения, меньшие единицы.

80. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

ξ	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
	0,2	0,7	0,1

Построить ряд распределения случайной величины $\sin\xi$.

80A. На светофоре в течение 1 минуты горит зеленый свет, а затем в течение 30 секунд красный. Автомобиль подъезжает к светофору в случайный момент времени. Построить график функции распределения случайного времени ожидания его у светофора. Что можно сказать о типе распределения этой случайной величины?

80B. Пусть $\alpha, \beta \geq 0$ и в сумме дают единицу, а F_1, F_2 – две функции распределения. Доказать, что $F(x) \; = \; \alpha F_1(x) \; + \; \beta F_2(x)$ – функция распределения. Как будет расположен ее график относительно графиков исходных функций?

81. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta \; = \; 3\xi$.

82. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(t) \; = \; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Найти плотность распределения $\eta \; = \; 1/\xi$.

83. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(t) \; = \; \begin{cases} t, \text{ при } 0 < t \leq \sqrt{2}, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти распределение $\eta \; = \; g(\xi)$, где

$$g(x) \; = \; \begin{cases} 1, \text{ когда } 0,5 < x \leq 1, \\ x^2 \text{ в остальных случаях .} \end{cases}$$

84. Плотность распределения случайной величины ξ равна

$$p(x) \ = \ e^{-x} \qquad (x \geq 0).$$

Найти плотность распределения $\eta \ = \ e^{-\xi}$.

85. Пусть ξ – случайная величина, обладающая непрерывной функцией распределения $F(x)$. Найти распределение $\eta \ = \ F(\xi)$.

85А. Решите предыдущую задачу в случае дискретной случайной величины ξ.

*85В. Пусть $F(x)$ – произвольная функция распределения, η – случайная величина, имеющая равномерное распределение на [0,1]. Определим

$$F^{-1}(z) \ = \ \sup\{x \mid F(x) \leq z\}, \quad z \ \in \ [0,1]$$

Какое распределение имеет случайная величина $F^{-1}(\eta)$?

8 Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$\mathbf{M}\xi \ = \ \sum x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

где сумма распространяется на все значения, принимаемые ξ. Если же ξ имеет плотность распределения $p(t)$, то

$$\mathbf{M}\xi \ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, p(t)\, dt.$$

Говорят, что математическое ожидание существует, если соответствующий интеграл или ряд сходится абсолютно. Синонимом понятия математического ожидания в обыденной речи является «среднее», «в среднем». Свойства математического ожидания:

М1. Для произвольных постоянных α, β

$$\mathbf{M}(\alpha\xi \ \pm \ \beta\eta) \ = \ \alpha\mathbf{M}\xi \ \pm \ \beta\mathbf{M}\eta;$$

М2. если C – постоянная, то $\mathbf{M}C \ = \ C$;

М3. $\xi \geq \eta \ \Rightarrow \ \mathbf{M}\xi \ \geq \ \mathbf{M}\eta$;

М4. ξ, η независимы $\Rightarrow$ $\mathbf{M}\xi\eta \ = \ \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta$;

М5. в случае дискретной случайной величины

$$\mathbf{M}g(\xi) \ = \ \Sigma g(x_i)\mathbf{P}(\xi = x_i),$$

в случае абсолютно непрерывной

$$\mathbf{M}g(\xi) \ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

для произвольной измеримой функции g.

Пример 23. *В лотерее участвует 100 билетов. При этом разыгрывается один выигрыш в 5000 рублей, 2 по 2500 рублей, 5 по 1000 рублей и 10 по 100 рублей. Какую следует установить цену билета, чтобы в среднем размер выигрыша на один билет равнялся бы половине его стоимости?*

Решение. Пусть x рублей – стоимость билета, ξ – величина выигрыша на купленный билет. Построим ряд распределения ξ.

ξ	$-x$	$100-x$	$1000-x$	$2500-x$	$5000-x$
	0,82	0,10	0,05	0,02	0,01

Очевидно, что $\mathbf{M}\xi \ = \ 160 - x$. По условию, $\mathbf{M}\xi \ = \ x/2$, откуда $x \ \approx 106$ руб. 67 коп.

Заметим в скобках, что тем самым устроители лотереи выручат от продажи билетов 10667 рублей, а раздадут в качестве выигрышей $5000 + 2 \times 2500 + 5 \times 1000 + 1000 \ = \ 16000$ рублей.

Пример 24. *Пусть ξ – число успехов в схеме Бернулли при проведении n испытаний с вероятностью успеха p. Найти $\mathbf{M}\xi$.*

Решение. Начнем со случая $n = 1$. Здесь

$$\mathbf{M}\xi \ = \ 0 \times q \ + \ 1 \times p \ = \ p.$$

Если $n > 1$, то рассмотрим случайные величины $\eta_1, ..., \eta_n$ – индикаторы успехов, каждая из которых равна 1 или 0 в зависимости от того, наблюдался ли успех в соответствующем испытании. Тогда

$$\xi \ = \ \eta_1 + ... + \eta_n \ \Rightarrow \ \mathbf{M}\xi \ = \ \mathbf{M}\eta_1 \ + ... + \ \mathbf{M}\eta_n \ = \ np.$$

Пример 25. *Вдоль дороги длиной s км расположено пуассоновское с параметром λ число инспекторов ГАИ. Автомобиль может двигаться с любой постоянной скоростью v, $0 \le v \le v_{max}$. Каждый из инспекторов с вероятностью kv ($k = 1/v_{max}$) останавливает автомобиль и задерживает его на время t_0. Найти оптимальную скорость движения, т.е. такую, при которой автомобиль в среднем преодолеет путь s за наименьшее время.*

Решение. Предположим, что число n инспекторов фиксировано. Обозначим это предположение через H_n. Время поездки

$$\tau = s/v + \xi t_0,$$

где ξ – число инспекторов, остановивших автомобиль ($0 \le \xi \le n$). Очевидно, что в предположении H_n ξ – число успехов при проведении n испытаний с вероятностью успеха $p = kv$. В этом случае (см. обозначение задачи 56 и пример 24)

$$\mathbf{M}(\xi/H_n) = kvn.$$

По условию,

$$\mathbf{P}(H_n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

Откуда, по формуле полного математического ожидания,

$$\mathbf{M}\xi = kv\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = kv\lambda\, e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda kv.$$

Рассмотрим

$$f(v) = \mathbf{M}\tau = \frac{s}{v} + t_0\mathbf{M}\xi = \frac{s}{v} + \lambda t_0 kv.$$

Минимум этой функции достигается при

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{sv_{max}}{\lambda t_0}}\,.$$

Итак, оптимальная скорость движения задается формулой

$$v_{opt} = \begin{cases} v_0 & \text{при } v_0 \le v_{max}; \\ v_{max} & \text{при } v_0 > v_{max}. \end{cases}$$

Пример 26. *Построить пример случайной величины, не имеющей математического ожидания.*

Решение. В силу данных определений следует связать искомый пример с расходящимися рядом или интегралом. Например, известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Рассмотрим случайную величину ξ с рядом распределения

$$\mathbf{P}(\xi = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2} \equiv p_n, \quad n = 1, 2, ...$$

Тогда

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится, и нужный пример тем самым построен.

ЗАДАЧИ

86. Найти математическое ожидание числа выигрышных лотерейных билетов, если приобретено 40 билетов, а вероятность выигрыша на один билет 0,05.

87. Семен стреляет в мишень до тех пор, пока не попадет. Вероятность попадания при одном выстреле p. Найти среднее значение числа необходимых для поражения цели выстрелов.

88. Подброшены две игральные кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков.

89. В задаче 55 найти математическое ожидание длины одного перехода рабочего.

90. Кондрат и Семен кладут в банку по одному рублю и подбрасывают игральную кость. Тот, у кого выпало больше очков, забирает банку. При равном количестве очков содержимое банки удваивается и игра продолжается. Чему равно среднее значение выигрыша каждого?

91. Цель со скоростью v залетает на обороняемую территорию. В единицу времени она подвергается пуассоновскому числу обстрелов с параметром λ. Вероятность сбить цель при одном обстреле p. Найти среднюю глубину проникновения цели на территорию.

91А. Из случайной точки единичной окружности с центром в нуле по касательной выпущен луч в сторону ближайшей оси координат. Найти среднюю длину отрезка этого луча до пересечения с осью координат, в сторону которой он выпущен.

92. Привести пример абсолютно непрерывной случайной величины, не имеющей математического ожидания.

93. Пусть случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения и $\mathbf{M}\xi < \infty$. Доказать, что

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geq n).$$

*94. Доказать, что если $\xi \geq 0$ и $\mathbf{M}\xi < \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} x\mathbf{P}(\xi \geq x) = 0.$$

95. Пусть ξ – случайное число писем, дошедших по адресу в задаче 46. Найти ее математическое ожидание.

95А. Из точки (-1,0) выпущен луч под случайным острым углом к положительному направлению оси Ox. Найти математическое ожидание длины хорды, высеченной на этом луче единичной окружностью с центром в начале координат.

95Б. В квадрат с верщинами (0,0), (0,2), (2,2), (2,0) брошена случайным образом точка. Найти среднюю величину площади, отсекаемой от этого квадрата прямой, проходящей через эту точку и параллельной прямой $x + y = 1$.

96. Найти математические ожидания случайных величин в задачах 76,77,79,82 и математическое ожидание числа убитых в задаче 45. Что можно сказать о математическом ожидании случайной величины в задаче 78?

97. Плотность распределения случайной величины задана формулой:

$$p(t) = At^{\lambda-1}e^{-\alpha t}\,(t \geq 0),$$

где λ, α фиксированные положительные параметры. Найти коэффициент A и математическое ожидание.

Указание: использовать Г-функцию

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx.$$

9 Дисперсия и корреляция

Дисперсией случайной величины ξ называют число

$$\mathbf{D}\xi \;=\; \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 \;=\; \mathbf{M}\xi^2 \;-\; (\mathbf{M}\xi)^2.$$

Дисперсия характеризует величину разброса значений случайной величины вокруг ее среднего. Выпишем некоторые свойства дисперсии:

Д1. $\mathbf{D}\xi \;\geq\; 0$, $\mathbf{D}\xi = 0 \iff \xi = \mathrm{const}$.

Д2. $\mathbf{D}(\lambda\xi) \;=\; \lambda^2\mathbf{D}\xi$.

Д3. $\mathbf{D}(\xi + c) \;=\; \mathbf{D}\xi$.

Д4. $\mathbf{D}(\xi + \eta) \;=\; \mathbf{D}\xi \;+\; \mathbf{D}\eta$ для независимых ξ и η.

Д5. $\mathbf{D}(\xi + \eta) \;=\; \mathbf{D}\xi \;+\; \mathbf{D}\eta \;+\; 2\,\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ для произвольно зависимых ξ, η, где $\mathrm{cov}(\xi, \eta) \;=\; \mathbf{M}\xi\eta \;-\; \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta$ – ковариация между ними.

Коэффициент корреляции между ξ и η вычисляют по формуле

$$\rho(\xi, \eta) \;=\; \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\,\mathbf{D}\eta}} \;=\; \frac{\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi \cdot \mathbf{M}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\,\mathbf{D}\eta}}\,.$$

Свойства коэффициента корреляции:

К1. $|\rho(\xi, \eta)| \;\leq\; 1$;

К2. $|\rho(\xi, \eta)| \;=\; 1 \iff \exists a, b \;:\; \xi \;=\; a\eta + b$.

К3. ξ, η - независимы $\Rightarrow\; \rho(\xi, \eta) \;=\; 0$.

Пример 27 . *Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке* [0,1]*, $a \in (0, 1)$ – постоянное число, $\eta \;=\; |\xi - a|$. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами ξ, η.*

Решение. По условию, плотность распределения ξ имеет вид

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, \text{ когда } x \in [0, 1]\ , \\ 0 \;\; \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_0^1 x dx = \tfrac{1}{2}; \quad \mathbf{M}\xi^2 = \int\limits_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3};$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \tfrac{1}{12};$$

$$\mathbf{M}\eta = \mathbf{M}|\xi - a| = \int\limits_0^1 |x - a| dx =$$

$$= \int\limits_o^a (a - x) dx + \int\limits_a^1 (x - a) dx = a^2 - a + \tfrac{1}{2};$$

$$\mathbf{M}\eta^2 = \int\limits_0^1 (x - a)^2 dx = \tfrac{(1-a)^3 + a^3}{3};$$

$$\mathbf{D}\eta = \tfrac{(1-a)^3 + a^3}{3} - \left(a^2 - a + \tfrac{1}{2}\right)^2;$$

$$\mathbf{M}\xi\eta = \mathbf{M}\xi|\xi - a| = \int\limits_0^1 x|x - a|\, dx = \tfrac{a^3}{3} - \tfrac{a^2}{2} + \tfrac{1}{12},$$

откуда

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{4a^3 - 6a^2 + 1}{\sqrt{1 - 12a^4 + 24a^3 - 12a^2}}.$$

Коэффициент корреляции обращается в 0 при $a = 1/2$, хотя величины зависимы. Таким образом, утверждение, обратное свойству К3, неверно.

ЗАДАЧИ

98. Найти дисперсию суммы очков, выпавших на двух игральных костях.

99. Рассчитать дисперсии случайных величин в задачах 76,77,82,83,97.

100. Построить пример случайной величины, не имеющей дисперсии.

101. Доказать, что

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta).$$

102. Построить пример дискретных зависимых случайных величин с нулевым коэффициентом корреляции.

103. Подброшены две игральные кости. Найти коэффициент корреляции между суммой и разностью количества очков, выпавших на костях.

103А. В единичный квадрат ABCD брошена точка М. Найти коэффициент корреляции между расстояниями точки М до стороны АВ и до вершины А.

103Б. Найти коэффициент корреляции в условиях примера 27, предполагая, что ξ имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$.

104. Пусть $|\rho(\xi, \eta)| = 1$. Доказать, что в выражении $\xi = a\eta + b$, существование которого следует из К2, знаки a и ρ совпадают.

105. Вывести формулу дисперсии суммы n случайных величин.

10 Двумерные распределения. Свертка

Если на одном вероятностном пространстве $< \Omega, F, \mathbf{P} >$ заданы две случайные величины ξ и η, то говорят, что задан случайный вектор $(\xi,\ \eta)$. Функция двух переменных

$$F(x, y) \;=\; \mathbf{P}(\xi < x,\ \eta < y) \;=\; \mathbf{P}(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\})$$

называется функцией распределения этого вектора, или функцией совместного распределения ξ и η.

Пусть нашлась такая неотрицательная функция $p(u, v)$, что

$$(\forall x.y)\ F(x, y) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} p(u, v)dudv,$$

тогда p называют плотностью распределения F. Плотность обладает тем свойством, что для произвольного измеримого по Лебегу $A \subseteq R^2$ выполнено

$$\mathbf{P}((\xi, \eta) \in A) \;=\; \iint\limits_{\{(u,v)|(u,v)\in A\}} p(u, v)dudv.$$

Отсюда, в частности, следует, что если (ξ, η) имеет плотность, то и ξ и η имеют плотности $f,\ g$ соответственно, причем

$$f(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, v)dv; \quad g(y) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(u, y)du.$$

Если ξ, η имеют плотности распределения f, g и независимы, то и распределение их суммы также имеет плотность, причем

$$p_{\xi+\eta}(z) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)\,dx.$$

Последняя формула носит название формулы свертки для плотностей.

Пример 28. *Двумерный случайный вектор* (ξ,η) *задан плотностью распределения*

$$p(u,v) \;=\; \begin{cases} \textit{1, когда } (u,v)\in S, \\ \textit{0, иначе,} \end{cases}$$

где S *– треугольник с вершинами* (0,0), (2,0), (2,1)*. Найти* $\rho(\xi,\eta)$*.*

Решение. Найдем плотности f_1, f_2 распределений случайных величин ξ,η соответственно:

$$f_1(x) \;=\; \int\limits_0^1 p(x,v)dv \;=\; \int\limits_0^{x/2} dv \;=\; \tfrac{x}{2} \quad (0\le x\le 2);$$
$$f_2(y) \;=\; \int\limits_0^2 p(u,y)du \;=\; \int\limits_{2y}^2 du \;=\; 2-2y \quad (0\le y\le 1).$$

При остальных x,y плотности равны нулю. Тем самым

$$\mathbf{M}\xi \;=\; \int\limits_0^2 \tfrac{x^2}{2}dx \;=\; \tfrac{4}{3};\ \mathbf{M}\eta \;=\; \int\limits_0^1 y(2-2y)dy \;=\; \tfrac{1}{3};$$
$$\mathbf{M}\xi^2 \;=\; 2;\ \mathbf{M}\eta^2 \;=\; \tfrac{1}{6};\ \mathbf{D}\xi \;=\; \tfrac{2}{9};\ \mathbf{D}\eta \;=\; \tfrac{1}{18}.$$

Найдем

$$\mathbf{M}\xi\eta \;=\; \int\limits_0^2 du \int\limits_0^{u/2} uvdv \;==\; \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\mathrm{cov}(\xi,\eta) \;=\; \mathbf{M}\xi\eta \;-\; \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta \;=\; \frac{1}{18}$, и, окончательно, получаем, что $\rho(\xi,\eta) \;=\; \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧИ

106. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Пусть ξ – число попаданий, η – число промахов. Построить функцию их совместного распределения.

107. Задана плотность распределения (ξ, η):

$$f(x,y) = \frac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти коэффициент A и вероятность попадания точки (ξ, η) в квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

108. Случайные величины ξ, η независимы, и каждая имеет стандартное нормальное распределение. Найти вероятность того, что

$$(\xi, \eta) \in \{(x,y) : 2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\}.$$

109. Определить плотность распределения случайного вектора, если функция его распределения равна

$$F(x,y) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by}) \quad (x, y \ge 0).$$

110. Двумерный случайный вектор (ξ, η) имеет плотность распределения $f(x,y) = Axy$ в области $\mathbf{D}$ – треугольнике, ограниченном прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ и $f(x,y)=0$ вне $\mathbf{D}$. Найти A и коэффициент корреляции между координатами.

111. Даны две независимые случайные величины ξ и η, имеющие экспоненциальные распределения с параметрами λ и μ. Найти распределение $\xi + \eta$.

112. Пусть независимые случайные величины имеют равномерные распределения на [0,1]. Построить график плотности распределения их суммы.

113. В условиях предыдущей задачи найти функцию и плотность распределения разности случайных величин.

114. Построить график функции распределения величины $\frac{\xi}{\eta}$, если случайные величины ξ, η независимы и имеют одинаковые экспоненциальные распределения с параметром 1.

*115. Найти распределение суммы двух стандартных нормальных случайных величин, если коэффициент ковариации между ними равен а)1; б) 0; в) 0,5.

11 Характеристические функции

Пусть ξ – случайная величина. Комплекснозначная функция действительного аргумента

$$\varphi_\xi(t) \;=\; \mathbf{M}\exp\{it\xi\}$$

называется характеристической функцией этой случайной величины, хотя правильнее говорить о характеристической функции соответствующего распределения. Если у ξ имеется плотность $p(x)$, то

$$p(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-itx}\,dt.$$

Это – формула обращения для плотностей. Выпишем некоторые свойства характеристических функций.

1. $\varphi(0) = 1$;
2. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\varphi_\xi(at)$;
3. для независимых ξ, η справедливо $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$;
4. если $\mathbf{M}|\xi|^k$ определено, то $\varphi(t)$ k раз дифференцируема и

$$\mathbf{M}\xi^k = i^k\varphi^{(k)}(0).$$

Очень часто используют то, что характеристическая функция однозначно определяет соответствующее распределение. Приведем здесь также для справки некоторые характеристические функции.

- $N(a, \sigma^2)$ $\qquad \exp\{ita - \frac{\sigma^2t^2}{2}\}$;
- Π_λ $\qquad \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$;
- $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ $\qquad (1 - \frac{it}{\alpha})^{-\lambda}$.

Пример 29. *Найти характеристическую функцию случайной величины, заданной своим рядом распределения*

ξ	-2	-1	1	2
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

.

Решение. Запишем

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{6}(e^{-2it} + e^{2it}) + \frac{1}{3}(e^{-it} + e^{it}) = \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{2}{3}\cos t.$$

Пример 30. *Найти моменты всех порядков случайной величины, заданной характеристической функцией* $\varphi(t) = \frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}e^{2it}$.

Решение. Разлагая косинус и экспоненту в абсолютно сходящиеся ряды и производя группировку соответственных членов, получим

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3\,(2m)!}(2 + 2^{2m})t^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2i)^{2m-1}}{3\,(2m-1)!}\, t^{2m-1}.$$

Сравнивая это разложение с разложением $\varphi(t)$ в ряд Маклорена, получающийся из свойства 4, находим

$$\mathbf{M}\xi^{2m} = \frac{1}{3}(2 + 2^{2m}), \quad \mathbf{M}\xi^{2m-1} = \frac{2^{2m-1}}{3}\,.$$

К такому же выводу можно было прийти иначе, если, ориентируясь на предыдущий пример, заметить, что распределение, соответствующее рассматриваемой характеристической функции, дискретно и задается следующим рядом распределения

ξ	-1	1	2
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.

Полезно в этом контексте отметить, что периодические характеристические функции отвечают дискретным распределениям. Рассмотрим пример иного рода.

Пример 31 . *Какое распределение соответствует характеристической функции* $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *?*

Решение. Согласно формуле обращения для плотностей,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2}\,dt \;=\; \frac{x}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iw}}{x^2 + w^2}\,dw.$$

Дополним этот интеграл по вещественной прямой интегралом по полуокружности достаточно большого радиуса R, лежащей в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Поскольку на такой полуокружности выполнено неравенство

$$\left|\frac{e^{-iw}}{x^2+w^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-x^2},$$

то интеграл по ней стремится к нулю при $R \to \infty$ равномерно. Следовательно, по лемме Жордана,

$$\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iw}}{x^2+w^2}\,dw = \frac{x}{2\pi}\oint\frac{e^{-iw}}{x^2+w^2}\,dw = \frac{x}{2\pi}\,2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iw}}{x^2+w^2}\right)\Big|_{w=\pm xi},$$

где Res(.) – вычет, а знак при подстановке w выбирается так, что подставляемая точка находится внутри контура. Это означает, что при $x > 0$ выбирается xi, иначе $-xi$. Для вычисления вычета используем известную формулу для полюсов первого порядка

$$\mathrm{Res}\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\Big|_{z=a} = \frac{\psi(a)}{\phi'(a)}.$$

Ответ: $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

ЗАДАЧИ

116. Найти характеристические функции дискретных распределений

a)

ξ	-1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

; b)

ξ	1	2	3
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

; c)

ξ	0	1	2
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

.

117. Каким распределениям соответствуют характеристические функции

$$a)\cos 2t; \qquad b)\frac{1}{4}e^{it} + \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos 4t?$$

118. Пусть

$$\mathbf{P}(\xi = k) = Aq^{k-1},\ k = 1, 2, ...$$

Найти A, вычислить соответствующую характеристическую функцию и с ее помощью указать способ вычисления сумм $\sum_{n=1}^{\infty} n^s q^{n-1}$ при натуральных s.

119. Найти характеристические функции равномерного на $[a, b]$; экспоненциального с параметром α распределений.

120. Определить характеристическую функцию, соответствующую распределению с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}.$$

121. Каким распределениям отвечают характеристические функции

$$a)\, e^{-t^2}; \quad *b)\, \frac{a^2}{a^2 + t^2}; \quad c)\, \frac{1}{1 - it}; \quad d)\, \frac{\sin t}{t}\ ?$$

122. Вычислить моменты всех порядков распределений в задаче 121.

123. Пусть $\varphi_\xi(t)$ известна. Найти $\varphi_{-\xi}(t)$.

124. Доказать, что что характеристическая функция принимает только действительные значения тогда и только тогда, когда распределение соответствующей случайной величины симметрично.

125. Доказать, что характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда она четна.

126. Доказать, что $\varphi(t) = a \cos t + b \sin t$ не может быть характеристической, если $b \neq 0$.

127. Доказать, что распределение с дифференцируемой характеристической функцией имеет конечную дисперсию тогда и только тогда, когда функция $\Psi(t) = \frac{1}{t}(\varphi'(t) - \varphi'(0))$ ограничена в нуле.