Приложение 1

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Алтайский государственный университет»
Кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине
Методы оптимизации и оптимальное управление

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль «Математика и компьютерные науки»

Разработчик:

Хворова Л.А. к.т.н., доцент
____________/ФИО /
подпись

Барнаул 2023

Визирование ФОС для исполнения в очередном учебном году

Фонд оценочных средств пересмотрен, обсужден и одобрен для исполнения в 2023-2024 учебном году на заседании кафедры ТКПМ

Внесены следующие изменения и дополнения: нет.	Протокол от 20.06.2023 №5 Зав.кафедрой: Понькина Е.В., доцент

Визирование ФОС для исполнения в очередном учебном году

Фонд оценочных средств пересмотрен, обсужден и одобрен для исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры ТКПМ

Внесены следующие изменения и дополнения:	Протокол от Зав.кафедрой Понькина Е.В., доцент *фио, должность*

Визирование ФОС для исполнения в очередном учебном году

Фонд оценочных средств пересмотрен, обсужден и одобрен для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры ТКПМ

Внесены следующие изменения и дополнения:	Протокол от Зав.кафедрой Понькина Е.В., доцент *фио, должность*

Визирование ФОС для исполнения в очередном учебном году

Фонд оценочных средств пересмотрен, обсужден и одобрен для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры ТКПМ

Внесены следующие изменения и дополнения:	Протокол от Зав.кафедрой Понькина Е.В. *фио, должность*

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля освоения дисциплины, Темы письменных работ для проведения текущего контроля (эссе, рефераты, курсовые работы и др.), Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации приведены в ФОС дисциплины на сайте АлтГУ \ Образовательные ресурсы \ Цифровой университет АлтГУ: https://portal.edu.asu.ru/ в дисциплине "Методы оптимизации и оптимальное управление": https://portal.edu.asu.ru/course/view.php?id=912.

Перечень формируемых компетенций:

ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.

ОПК-4.1: Знает базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.

ОПК-4.2: Умеет использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности.

ОПК-4.3: Имеет практический опыт применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.

Компетенции/контролируемые этапы	Показатели	Наименование оценочного средства
Начальный этап формирования компетенций осуществляется в период освоения учебной дисциплины и характеризуется освоением учебного материала		
ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.	**Знать:** базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности. **Уметь:** использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности. **Владеть:** практическим опытом применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.	Письменный опрос по базовым понятиям методов оптимизации Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Практическое задание № 1
Базовый этап формирования компетенций (формируется по окончании изучения дисциплины)		
ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных си-	**Знать:** базовые основы современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой дея-	Контрольная работа № 3

стем.	тельности. **Уметь:** использовать этот математический аппарат в профессиональной деятельности. **Владеть:** практическим опытом применения современного математического аппарата, связанного с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.	Практическое задание № 2 Экзамен
Заключительный этап формирования компетенции осуществляется и оценивается в период прохождения практик, НИР, ГИА		

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

5.1. Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля освоения дисциплины

1). Письменный опрос по базовым понятиям методов оптимизации

Письменный опрос по базовым понятиям методов оптимизации включает вопросы по пройденному теоретическому материалу на лекциях (раздел «Классическая теория оптимизации») и необходимых сведениях из других дисциплин (математический анализ, алгебра, функциональный анализ), а также одну оптимизационную задачу на формализацию.

Перечень заданий /вопросов
I. Основные понятия теории экстремальных задач: 1. Приведите примеры практических задач применения методов оптимизации, вариационного исчисления и оптимального управления. Ответ: определение наиболее эффективного режима работы различных технических систем, космической навигации, задачах организации производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах и др. 2. Дайте определение линейного пространства. Ответ: *Линейным пространством* называется множество R элементов, для которых определены операции сложения и умножения их на числа, причем выполнены следующие аксиомы: 1) $x+y=y+x$; 2) $(x+y)+z=x+(y+z)$; 3) существует такой элемент 0 (нулевой элемент), что $x+0=x$ для $\forall x\in R$; 4) $\forall x\in R$ существует такой элемент $-x$ (противоположный элемент), что $x+(-x)=0$; 5) $1\cdot x=x$; 6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x)$; 7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$; 8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$. 3. Норма и ее свойства. Нормированное пространство. Ответ: Линейное пространство X называется *нормированным*, если на X определен функционал $\|\cdot\|_X : X\to \mathrm{R}$, называемый *нормой* и удовлетворяющий условиям: 1. $\|x\|\ge 0 \quad \forall x\in X$ и $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$; 2. $\|\alpha x\|=\|\alpha\|\cdot\|x\| \quad \forall\alpha\in \mathrm{R},\ \forall x\in X$; $\|x_1+x_2\|\le\|x_1\|+\|x_2\|,\ \forall x_1,\ x_2\in X$. 4. Скалярное произведение Ответ: Если каждой паре векторов x, y линейного пространства L поставлено в соответствие действительное число (x, y), так, что для любых x, y и z из L и любого действительного числа α справедливы следующие аксиомы: 1) $(x,y)=(y,x)$,

2) $(\alpha \cdot x, y) = \alpha(x, y)$,

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

4) $(x, x) > 0, \forall x \neq 0, (0,0) = 0$,

то в пространстве L определено скалярное произведение (x, y).

5. Евклидово пространство.

Ответ: Линейное пространство вместе с заданным в нём скалярным произведением называется *евклидовым пространством* и обозначается через E.

6. Функция, функционал, оператор. Примеры.

Ответ:

Переменная величина z называется функцией переменной величины x, что обозначается так: $z = f(x)$, если каждому значению x из некоторой области изменения x соответствует значение z, т.е. имеет место соответствие: числу x соответствует число z.

Переменная величина v называется *функционалом*, зависящим от функции $y(x)$, что обозначается так: $v = v[y(x)]$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций $y(x)$ соответствует значение v, т.е. имеет место соответствие: функции $y(x)$ соответствует число v.

Понятие «оператор» является более общим, чем понятия «функционал» и «функция». Если функция ставит в соответствие две переменные величины, а функционал – переменную величину и функцию, то оператор ставит в соответствие две функции.

Например, для $y = f(x)$, задавая значения аргумента x, получим числовое значение функции y. Для функционала $y = F[x(t)]$, задавая функцию $x(t)$, получим числовое значение функционала y. Оператор ставит в соответствие две функции, например $y(t) = Ax(t)$. Таким образом, оператор A представляет собой совокупность математических и логических действий, в результате которых заданной функции $x(t)$ ставится в соответствие функция $y(t)$. В качестве примера можно указать оператор дифференцирования $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ или интегрирования $y(s) = \int g(t,s)x(t)dt$.

7. Постановка общей задачи математического программирования.

Ответ: Пусть X – линейное пространство, на котором заданы функционалы $f, g_1, g_2, ..., g_k$ и G – оператор, принимающий значения в линейном пространстве Y. *Общая задача математического программирования* имеет следующий вид:

$$f(x) \to \min$$

при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., k,$$

$$G(x) = 0. \qquad (1)$$

$f(x)$ называется целевым функционалом (целевой функцией).

Если $Y = \mathrm{R}^{m-k}$, $m > k$, то оператор G является векторным функционалом $G = (g_{k+1}, ..., g_m)$ и ограничение (1) в «покоординатной форме» записывается в виде равенств $g_j(x) = 0, \quad j = k+1, ..., m$.

8. Типы (постановки) задач математического программирования: задачи линейного программирования, задачи нелинейного программирования; задачи на безусловный экстремум; задачи на условный экстремум.

9. Типы функционалов и виды ограничений в задачах вариационного исчисления.

10. Характеристика задач оптимального управления.

- --

II. Классическая теория оптимизации:

11. Формализация задачи.
12. Основные этапы формализации (построения математической модели).
13. Элементы формализованной задачи.
14. Абсолютный минимум (максимум).
15. Локальный минимум (максимум).
16. Переход от задач на максимум к задачам на минимум.
17. Определение критического множества.
18. Безусловная оптимизация. Постановка гладкой задачи без ограничений.
19. Теорема – Необходимое условие экстремума первого порядка.
20. Стационарные точки. Условие стационарности.
21. Матрица Гессе.
22. Теорема – Необходимое условие экстремума второго порядка.
23. Теорема – Достаточное условие экстремума второго порядка.
24. Критерий Сильвестра.

25. Схема поиска безусловных экстремумов.
26. Теорема Вейерштрасса и ее следствие.

- --
- Постановка гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств.
- Суть принципа Лагранжа.
- Теорема – Правило множителей Лагранжа.
- Теорема – Необходимое условие экстремума второго порядка.
- Теорема – Достаточное условие экстремума второго порядка.
- Правило решения задачи с ограничениями типа равенств.
- ---
- Постановка гладкой задачи с равенствами и неравенствами.
- Теорема – Необходимое условие экстремума 1-го порядка.
- Теорема – Необходимое условие экстремума 2-го порядка.
- Теорема – Достаточное условие экстремума 2-го порядка.
- Правило решения гладкой задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.
- ---
- Определение отрезка.
- Выпуклое множество, выпуклая и вогнутая функции.
- Геометрическая интерпретация выпуклости функции.
- Примеры выпуклых и вогнутых функций.
- Критерий выпуклости функций.
- Отделимые и строго отделимые множества.
- Первая теорема отделимости в конечномерном случае.
- Супремум и инфимум функции.
- Постановка задачи выпуклого программирования.
- Свойства задач выпуклого программирования
- Теорема Куна-Таккера.

Образцы вариантов письменного опроса:

ВАРИАНТ №1

1. Постановка общей задачи математического программирования.
2. Матрица Гессе. Критерий Сильвестра.
3. Теорема – Достаточное условие экстремума второго порядка в задачах с ограничениями типа равенств.
4. Супремум и инфимум функции.
5. Постановка гладкой задачи с равенствами и неравенствами.

ВАРИАНТ №2

1. Типы функционалов и виды ограничений в задачах вариационного исчисления.
2. Локальный и абсолютный минимум и максимум.
3. Постановка и правило решения гладкой задачи без ограничений.
4. Теорема Куна-Таккера.
5. Стационарные точки. Условие стационарности.

ВАРИАНТ №3

1. Функция, функционал, оператор. Примеры.
2. Теорема Вейерштрасса и ее следствие.
3. Теорема – Правило множителей Лагранжа.
4. Выпуклое множество, выпуклая и вогнутая функции.
5. Постановка и правило решения задачи с ограничениями типа равенств.

ВАРИАНТ №4

1. Примеры практических задач применения методов оптимизации, вариационного исчисления и оптимального управления.
2. Формализация задачи. Основные этапы формализации.
3. Правило решения гладкой задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.
4. Критерий выпуклости функций.
5. Норма и ее свойства.

Оценивание результатов письменного опроса по базовым понятиям методов оптимизации

10-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
9 – 10 (повышенный уровень)	1. Полнота и правильность выполнения задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Самостоятельность решения.	Студентом задания выполнены правильно и самостоятельно. В формулировках нет ошибок, даны полные ответы на поставленные вопросы.
7 – 8 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено самостоятельно. В формулировках нет существенных ошибок; даны неполные ответы на поставленные вопросы.
5 – 6 (пороговый уровень)		Студентом задания выполнены с подсказками преподавателя или не полностью. В формулировках есть ошибки, даны неполные ответы на поставленные вопросы.
0 – 4 (уровень не сформирован)		Студентом задание не выполнено.

2). Контрольная работа №1 «Классическая теория оптимизации».

Оценивание результатов контрольной работы №1

20-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
18 – 20 (повышенный уровень)	1. Полнота и правильность выполнения задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Самостоятельность решения.	Студентом задание выполнено самостоятельно. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логических рассуждениях и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание выполнено рациональным способом.
15 – 17 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказкой преподавателя. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логическом рассуждении и выполнении нет существенных ошибок; есть объяснение решения, допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.
10 – 14 (пороговый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказками преподавателя. При этом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, задание выполнено не полностью или в общем виде.
0 – 9 (уровень не сформирован)		Студентом задание не выполнено.

3). Контрольная работа №2 «Классическое вариационное исчисление».

Оценивание результатов контрольной работы №2

25-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
23 – 25 (повышенный уровень)	4. Полнота и правильность выполнения задания; 5. Своевременность выполнения задания; 6. Самостоятельность решения.	Студентом задание выполнено самостоятельно. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логических рассуждениях и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание выполнено рациональным способом.
20 – 22 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказкой преподавателя. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логическом рассуждении и выполнении нет существенных ошибок; есть объяснение решения, допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.
14 – 19 (пороговый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказками преподавателя. При этом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, задание выполнено не полностью или в общем виде.
0 – 13		Студентом задание не выполнено.

(уровень не сформирован)		

4). Контрольная работа №3 «Задачи оптимального управления»

Оценивание результатов контрольной работы №3

25-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
23 – 25 (повышенный уровень)	1. Полнота и правильность выполнения задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Самостоятельность решения.	Студентом задание выполнено самостоятельно. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логических рассуждениях и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание выполнено рациональным способом.
20 – 22 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказкой преподавателя. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логическом рассуждении и выполнении нет существенных ошибок; есть объяснение решения, допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.
14 – 19 (пороговый уровень)		Студентом задание выполнено с подсказками преподавателя. При этом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, задание выполнено не полностью или в общем виде.
0 – 13 (уровень не сформирован)		Студентом задание не выполнено.

Практическое задание № 1: Используя библиотеки языка программирования Python, методы и алгоритмы нахождения оптимальных решений в гладких задачах классической теории оптимизации найти решение следующих задач:
Смотреть образец варианта контрольной работы №1.

Оценивание результатов выполнения практического задания №1

10-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
9 – 10 (повышенный уровень)	1. Полнота и правильность выполнения задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Самостоятельность решения.	Студентом задания выполнены правильно и самостоятельно. В формулировках нет ошибок, даны полные ответы на поставленные вопросы.
7 – 8 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено самостоятельно. В формулировках нет существенных ошибок; даны неполные ответы на поставленные вопросы.
5 – 6 (пороговый уровень)		Студентом задания выполнены с подсказками преподавателя или не полностью. В формулировках есть ошибки, даны неполные ответы на поставленные вопросы.
0 – 4 (уровень не сформирован)		Студентом задание не выполнено.

Практическое задание № 2: Используя библиотеки языка программирования Python, методы и алгоритмы нахождения оптимального решения простейшей задачи классического вариационного исчисления (метод Эйлера, метод Ритца и метод прогонки), найти решение следующих задач:
Смотреть образец варианта контрольной работы №2.

Оценивание результатов выполнения практического задания №2

10-балльная шкала	Показатели	Критерии

(уровень освоения)		
9 – 10 (повышенный уровень)	1. Полнота и правильность выполнения задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Самостоятельность решения.	Студентом задания выполнены правильно и самостоятельно. В формулировках нет ошибок, даны полные ответы на поставленные вопросы.
7 – 8 (базовый уровень)		Студентом задание выполнено самостоятельно. В формулировках нет существенных ошибок; даны неполные ответы на поставленные вопросы.
5 – 6 (пороговый уровень)		Студентом задания выполнены с подсказками преподавателя или не полностью. В формулировках есть ошибки, даны неполные ответы на поставленные вопросы.
0 – 4 (уровень не сформирован)		Студентом задание не выполнено.

По результатам письменного опроса, контрольных работ и выполнения практических заданий с учетом оценивания активности работы на лекционных и практических занятиях, выполнения домашних заданий может быть выставлена **оценка по дисциплине – отлично, хорошо или удовлетворительно**. Шкала оценивания приведена в таблице.

Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
85 – 100	70 – 84	50 – 69	0 – 49

В случае несогласия с положительной оценкой или неаттестацией по дисциплине (оценка – неудовлетворительно), студент допускается к экзамену.

Оценивание ответа на экзамене

100-балльная шкала (уровень освоения) **Перевод баллов в оценку**	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень) 85-100	1. Четкость и полнота изложения теоретического материала. 2. Полнота и правильность решения практического задания. 3. Степень понимания материала.	Студент глубоко знает теоретические вопросы дисциплины. Практические задания выполнены самостоятельно и в полном объеме. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логических рассуждениях и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание выполнено рациональным способом.
Хорошо (базовый уровень) 70-84		Студент, в основном, знает теоретические вопросы дисциплины. Практические задания выполнены самостоятельно и в полном объеме. При этом составлен правильный алгоритм выполнения задания, в логических рассуждениях и решении есть незначительные ошибки, получен верный ответ, задание выполнено рациональным способом.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом даны ответы на теоретические вопросы из билета, свидетельствующие, в основном, о знании изучаемой дисциплины. Допускаются существенные ошибки в ответах на тео-

50-69		ретические вопросы; не выполнено полностью практическое задание.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован) 0-49		Студентом не дано правильных ответов на вопросы из списка вопросов для экзамена. Практическое задание не выполнено.

3. Типовые контрольные задания, необходимые для оценки планируемых результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Перечень заданий
Контрольная работа №1 «Классическая теория оптимизации» Контрольная работа включает решение одной задачи по трем из пройденных тем: 1. Гладкие задачи без ограничений. 2. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. 3. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств. **Контрольная работа №2** «Классическое вариационное исчисление». Контрольная работа включает решение задач по двум из пройденных тем: 1. Задача Больца. 2. Простейшая задача. 3. Задача с подвижными концами. 4. Изопериметрическая задача. 5. Задача со старшими производными. .**Контрольная работа №3** «Задачи оптимального управления». Контрольная работа включает решение двух задач по пройденным темам: 1. Задача Лагранжа. 2. Задача оптимального управления в форме Понтрягина.

Образец варианта контрольной работы №1:

1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^3 - 2x_1 x_2, \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

► Составим систему алгебраических уравнений (1.3):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 12x_2^2 - 2x_1 = 0. \end{cases}$$

Найдем критические точки: $(x_1, x_2) = (0,0)$ и $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$.

Составим матрицу Гессе:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1} = 2, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2} = 24x_2, \ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2, \\ \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 24x_2 \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Исследуем знак матрицы Гессе в найденных точках.

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$ – не является знакоопределенной (главный угловой минор 2-го порядка, совпадающий с определителем самой матрицы, отрицателен). Следовательно, точка $(x_1, x_2) = (0,0)$ не является экстремальной. $\nabla^2 f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$. Данная матрица положительно определена. Следовательно, точка $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$ – точка строгого локального минимума, $f\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{108}$.

Исследуем на глобальный экстремум. Рассмотрим, например, значение функции $f(0,-1) = -4$. Получим, что $f\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right) > f(0; -1)$, т.е. рассматриваемая точка не может быть точкой глобального минимума. Точек глобального минимума нет. ◄

2. Применить правило множителей Лагранжа к решению задачи:

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 x_3 \to extr,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 x_3 = 10, \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 50. \end{cases}$$

► 1. Приведем задачу к виду (1.4):

$$f_0(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 x_3 \to extr,$$
$$f_1(x) = x_1 + 2x_2 x_3 - 10 = 0,$$
$$f_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 50 = 0.$$

2. Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = \lambda_0 (3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 x_3) + \lambda_1 (x_1 + 2x_2 x_3) + \lambda_2 (x_1^2 + 2x_2^2 - 50).$$

3. Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \lambda_0 (6x_1 + 2) + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \lambda_0 (4x_2 + 4x_3) + 2\lambda_1 x_3 + 4\lambda_2 x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 4\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0. \end{cases}$$

Дополним уравнениями связи:

$$x_1 + 2x_2 x_3 = 10,$$
$$x_1^2 + 2x_2^2 = 50.$$

Полагаем $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$. Получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \quad (1) \\ 2x_2 + 2x_3 + 2\lambda_1 x_3 + 4\lambda_2 x_2 = 0, \quad (2) \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \quad (3) \\ x_1 + 2x_2 x_3 = 10, \quad (4) \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 50. \quad (5) \end{cases}$$

Из (3): $x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_2(1+\lambda_1) = 0$, отсюда $x_2 = 0$ или $\lambda_1 = -1$.

Рассмотрим случай $\underline{x_2 = 0}$. Из (4) следует $x_1 = 10$, из (5): $x_1^2 = 50$. Получили противоречие. Следовательно, $x_2 \neq 0$.

Рассмотрим случай $\underline{\lambda_1 = -1}$. Перепишем (1), (2):

$$3x_1 + 1 - 1 + 2\lambda_2 x_1 = 0, \quad (1)$$
$$2x_2 + x_3 - 2x_3 + 4\lambda_2 x_2 = 0. \quad (2)$$

$x_1 = 0$ или $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

Начнем со случая $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Подставим в (2): $2x_2 - 6x_2 = 0 \;\Rightarrow x_2 = 0$, но $x_2 \neq 0$. Следовательно, $\lambda_2 \neq -\frac{3}{2}$.

Рассмотрим случай $\underline{x_1 = 0}$. Из (5): $x_2^2 = 25 \;\Rightarrow\; x_2 = \pm 5$.

Из (4): $x_2 x_3 = 5. \quad x_3^1\Big|_{x_2=-5} = -1; \quad x_3^2\Big|_{x_2=5} = 1$. Получили две подозрительные на экстремум точки:

$$\bar{x} = (0,-5,-1) \text{ и } \hat{x} = (0,5,1).$$

Из (2) определим λ_2: $x_2(1+2\lambda_2) = 0$. Так как $x_2 \neq 0 \;\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Получили: $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$, $\bar{x} = (0,-5,-1)$, $\hat{x} = (0,5,1)$.

4. Составим матрицу вторых производных по x функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L(\lambda,\hat{x})}{\partial x^2} = \left.\begin{pmatrix} 6\lambda_0 + 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda_0 + 4\lambda_2 & 4\lambda_0 + 2\lambda_1 \\ 0 & 4\lambda_0 + 2\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\substack{\lambda_0 = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица не является строго определенной. Проверим достаточное условие оптимальности второго порядка (теорема 1.6):

$$\nabla f_1(x) = (1, 2x_3, 2x_2), \; \nabla f_2(x) = (2x_1, 4x_2, 0).$$

Ограничения (1.7) на вектор $h = (h_1, h_2, h_3)$ приводят к условиям:

1) $\langle \nabla f_1(\bar{x}), h\rangle = h_1 + 2h_2\bar{x}_3 + 2\bar{x}_2 h_3 = h_1 - 2h_2 - 10h_3 = 0$,

2) $\langle \nabla f_2(\hat{x}), h\rangle = 2\hat{x}_1 h_1 + 4\hat{x}_2 h_2 = 20h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 0$.

Тогда из условия 1): $h_1 - 10h_3 = 0$. В силу нетривиальности вектора h: $h_1 \neq 0, \quad h_3 \neq 0$. $\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} h, h \right\rangle = 2h_1^2 > 0$ для каждой стационарной точки.

Согласно теореме 1.6 точки $\bar{x} = (0,-5,-1)$ и $\hat{x} = (0,5,1)$ являются точками строгого локального минимума функции f. Причем $f(\bar{x}) = f(\hat{x}) = 70$.

5. Применим в рассматриваемой задаче метод исключения. Из соотношения $x_1 + 2x_2x_3 = 10$ выразим $4x_2x_3 = 20 - 2x_1$; из соотношения $x_1^2 + 2x_2^2 = 50$ выразим $2x_2^2 = 50 - x_1^2$.

Подставим эти выражения в целевую функцию, получим $f = 2x_1^2 + 70$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 > 0$, т.е. точка $x_1 = 0$ – точка глобального минимума функции одной переменной $f = 2x_1^2 + 70$. Остальные компоненты вектора x определяются из уравнений связи.

Ответ: $\bar{x} = (0,-5,-1)$ и $\hat{x} = (0,5,1)$ – точки глобального минимума функции f, $\min f = 70$. ◄

3. Решить задачу:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \inf, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{aligned}$$

► 1. Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

2. Выпишем необходимые условия:

а) стационарности:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x_1} &= 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \mathcal{L}_{x_2} &= 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \mathcal{L}_{x_3} &= 2\lambda_0 x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{aligned}$$

б) дополняющей нежесткости: $\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0$;

в) неотрицательности: $\lambda_0 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0$.

3. Найдем критические точки.

Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ и перепишем условия:

$$\begin{cases} x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (1) \\ x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (2) \\ x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (3) \\ \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0, & (4) \\ \lambda_1 \ge 0, & (5) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. & (6) \end{cases}$$

Из (4): $\lambda_1 = 0$ или $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$. Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда $x_1 = -\lambda_2$; $x_2 = -\lambda_2$; $x_3 = -\lambda_2$. Подставим в (6): $-3\lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$ – критическая точка.

Рассмотрим случай $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$. (*)

Выразим из (1)–(3): $x_1 = -2\lambda_1 + \lambda_2$; $x_2 = \lambda_1 - \lambda_2$; $x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$ и подставим в (6) и (*): $\lambda_1 = -\frac{11}{10} < 0$ – противоречие с условием (5).

4. Применим следствие из теоремы Вейерштрасса: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$. Значит, решение задачи существует, а в силу единственности критической точки решением может быть только она.

Ответ: $\hat{x} = (1,1,1) \in abs\min, \quad f_{\min} = 3$.

Образцы вариантов контрольной работы №2:

1. Решить задачу Больца:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr.$$

Решение:

1. Составим уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) + (-2x) = 0 \;\Rightarrow\; -2\ddot{x} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} + x = 0.$$

Решение дифференциального уравнения: $\hat{x}(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t$.

2. Условия трансверсальности:

$$\begin{cases} 2\dot{x}(0) = 2x(0), \\ 2\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = x(0), \\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2. \end{cases}$$

Решая систему, найдем допустимую экстремаль: $\hat{x} = \cos t + \sin t$.

3. Для того чтобы показать существование экстремума или его отсутствие, рассмотрим разность

$$\mathcal{B}(\hat{x}+h) - \mathcal{B}(\hat{x}) = \{\ h(\cdot) \in C^1([t_0,t_1])\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\dot{\overline{\hat{x}+h}})^2 - (\hat{x}+h)^2)dt + (\hat{x}+h)^2(0) -$$

$$-(\hat{x}+h)^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4(\hat{x}+h)\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{\hat{x}}^2 - \hat{x}^2)dt - \hat{x}^2(0) + \hat{x}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\hat{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\dot{\hat{x}}\dot{h} + \dot{h}^2 - 2\hat{x}h - h^2)dt + 2\hat{x}h(0) + h^2(0) - 2\hat{x}h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4h\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= I_1 + I_2.$$

$$I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{\hat{x}}\dot{h} - \hat{x}h)\,dt + 2\hat{x}h(0) - 2\hat{x}h\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4h\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{\hat{x}}\dot{h}dt = \begin{Bmatrix} u = \dot{\hat{x}} \;;\; u' = \ddot{\hat{x}} \\ v' = \dot{h} \;;\; v = h \end{Bmatrix} = \dot{\hat{x}}h\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ddot{\hat{x}}hdt = \dot{\hat{x}}h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \dot{\hat{x}}h(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ddot{\hat{x}}hdt \right\} =$$

$$= 2\dot{\hat{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right)h\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\dot{\hat{x}}(0)\cdot h(0) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ddot{\hat{x}}h + \hat{x}h)\,dt +$$

$$+ 2\hat{x}(0)h(0) - 2\hat{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)h\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4h\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -2h\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2h(0) + 2h(0) - 2h\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow I_1 = 0.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{h}^2 - h^2)dt + h^2(0) - h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \langle = \rangle$$

Знак I_2 не определен. Возьмем в качестве $h_1 = const = c;\quad h_2 = \cos t$.

$$\langle = \rangle \{h_1 = c\} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} c^2\,dt + c^2(0) - c^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -c^2\frac{\pi}{2} < 0.$$

$$\langle = \rangle \{h_2 = \cos t\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \cos^2 t)dt + \cos^2 0 - \cos^2\frac{\pi}{2} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt + 1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d(2t) + 1 = -\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 1 = 1 > 0.$$

Следовательно, $\hat{x} = \cos t + \sin t$ не доставляет экстремума.

<u>Ответ:</u> $\hat{x} = \cos t + \sin t \notin locextr$. ◄

2. Решить простейшую задачу:

$$J(x(\cdot))=\int_0^1 \dot{x}^3 dt \to \inf;\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$$

Решение:

► Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}3\dot{x}^2=0 \Leftrightarrow 3\dot{x}^2=c$ (или $6\dot{x}\ddot{x}=0$) или $\dot{x}=const$.

Общее решение: $x=c_1\cdot t+c_2$. Единственная допустимая экстремаль: $\hat{x}=t$ – доставляет слабый локальный минимум.

Действительно, пусть $\hat{x}+h$ – допустимая функция, где $h(\cdot)\in C_0^1([0,1])$. Тогда

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^1(\dot{\hat{x}}+\dot{h})^3dt-\int_0^1\dot{\hat{x}}^3dt=\int_0^1(3\dot{\hat{x}}^2\dot{h}+3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2+\dot{h}^3)dt=$$

$$\left\{\begin{matrix} u=\dot{\hat{x}}^2;\ u'=2\dot{\hat{x}}\ddot{\hat{x}} \\ v'=\dot{h};\ v=h\end{matrix}\right\}=\dot{\hat{x}}^2h\Big|_0^1+\int_0^1(3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2+\dot{h}^3-\underbrace{2\dot{\hat{x}}\ddot{\hat{x}}h}_{0})dt=$$

$$=\int_0^1\dot{h}^2(3\dot{\hat{x}}+\dot{h})dt=\{\hat{x}=t;\ \dot{\hat{x}}=1\}=\int_0^1\dot{h}^2(3+\dot{h})dt.$$

Воспользуемся оценкой $\|h\|_1=\max_{[0,1]}|h|+\max_{[0,1]}|\dot{h}|<3 \Rightarrow \max_{[0,1]}|\dot{h}|<3 \Rightarrow |\dot{h}|<3,$

$-3<\dot{h}<3 \Rightarrow \dot{h}+3>0 \Rightarrow \hat{x}\in loc\min$. ◄

---

1. $\int_1^e 2$ $-3x^2(1)-x^2(e)-4x(e)\to extr.$
2. $\int_0^T$ $r;\ x(0)=0,\ T+x(T)+1=0.$
3. $\int_0^{\pi/2}($ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

---

1. $\int_0^{e-1}(t+1)$ $0)\left[x(e-1)+1\right]\to extr.$
2. $\int_0^T$ $r;\ x(0)=0,\ (T-1)x^2(T)+2=0.$
3. $\int_0^1($

---

1. $\int_0^\pi($ $x\sin t)dt+2x^2(0)+2x(\pi)-x^2(\pi)\to extr.$
2. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}(x^2-$ $t)dt\to extr;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$
3. $\int_0^\pi($ $)=1.$

1. $\int_0^1 ($

2.

$\int_0^1 (\quad \to extr;\ x(0)=x(1)=0.$

3. $\int_0^{\pi} x\sin t dt \to extr;\ \int_0^{\pi} \quad \frac{3\pi}{2},\ x(0)=0,\ x(\pi)=\pi.$

Образцы вариантов контрольной работы №3:

Вариант 1

1. $\int_0^1 (x^2+u^2)dt \to extr;\ \quad x(1)=1.$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin t dt \to extr;\ \quad \pi)=0.$

Вариант 2

1. $\int_0^1 (x^2+2u^2)dt \to extr;\ \quad \sqrt{2} \quad ,\ x(0)=1.$

2. $\int_0^2 \quad 2)=-3.$

Вариант 3

1. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \to extr;\ \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{\pi}{2}$

2. $\int_0^{T_0} ($

Вариант 4

1. $\int_0^1 u^2 dt \to extr;$

2. $\int_0^{T_0} ($

На начальном этапе формирования компетенции оценивание знаний, умений и навыков проводится с использованием письменного опроса, трех контрольных работ и двух практических заданий.

Базовый этап формирования компетенции оценивается на экзамене.

Экзамен проводится в устной форме. В экзаменационный билет включено два теоретических вопроса и два практических задания.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Перечень заданий /вопросов
I. Классическая теория оптимизации 1. Формализация задач. Основные этапы формализации. 2. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами. 3. Привести примеры формализации экстремальных задач (задача Архимеда). *1.1. Безусловная оптимизация. Гладкие задачи без ограничений.* 1. Постановка задачи безусловной оптимизации. Необходимые и достаточные условия экстремума первого и второго порядка. 2. Схема поиска безусловных экстремумов функций. Критерий Сильвестра. *1.2. Гладкая конечномерная задача с ограничениями типа равенств.* 1. Постановка задачи. Правило множителей Лагранжа (Теорема). 2. Необходимое и достаточное условие экстремума второго порядка. 3. Правило решения задач с ограничениями типа равенств. Критерий Сильвестра. *1.3. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.* 1. Постановка задачи. Правило решения. 2. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума. *1.4. Задачи выпуклого программирования.* 1. Постановка задачи. Основные понятия. 2. Лемма о локальном минимуме в выпуклой задаче. 3. Теорема Куна-Таккера. **II. Классическое вариационное исчисление.** 2.1. Постановка общей задачи математического программирования. 2.2. Постановка задачи Больца. Основные понятия. Правило решения. 2.3. Необходимое условие экстремума для задачи Больца (Теорема). 2.4. Простейшая задача классического вариационного исчисления. Основные понятия. Правило решения. 2.5. Необходимое условие экстремума простейшей задачи (Теорема). 2.6. Задача с подвижными концами. Основные понятия. Правило решения. 2.7. Необходимое условие экстремума для задачи с подвижными концами (Теорема). 2.8. Изопериметрическая задача. Постановка. Основные понятия. Правило решения. 2.9. Необходимое условие экстремума для изопериметрической задачи (Теорема). 2.10. Постановка задачи со старшими производными. Основные понятия. Правило решения. 2.11. Необходимое условие экстремума для задачи со старшими производными (Теорема). **III. Задача Лагранжа и оптимальное управление.** 3.1. Постановка задачи Лагранжа. Основные понятия. Правило решения. 3.2. Теорема Эйлера-Лагранжа (формулировка). 3.3. Постановка задачи оптимального управления в форме Понтрягина. Основные понятия. 3.4. Правило решения задачи оптимального управления (в форме Понтрягина). 3.5. Принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия экстремума (формулировка). Примечание. В билете две задачи: из раздела II и III.

Перечень практических заданий на экзамене

1. **Решить задачу классического вариационного исчисления:**
   – Задачи Больца
   – Простейшая задача
   – Задача с подвижными концами
   – Изопериметрическая задача
   – Задача со старшими производными
2. **Решить задачу оптимального управления:**
   – Задача Лагранжа
   – Задача оптимального управления в форме Понтрягина

Образцы билетов на экзамен:

Билет №1

1. Гладкая конечномерная задача с ограничениями типа равенств. Постановка задачи. Правило множителей Лагранжа (Теорема).
2. Постановка задачи Лагранжа. Основные понятия. Правило решения.
3. Решить задачу оптимального управления в форме Понтрягина $\int_0^4 \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to \inf; \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0$
4. Решить задачу Больца

$$\int_0^{\pi/2} \left(\dot{x}^2 - x^2\right) dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$$

Билет №2

1. Теорема Куна-Таккера.
2. Теорема Эйлера-Лагранжа.
3. Решить задачу оптимального управления в форме Понтрягина

$$\int_0^{T_0} \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to extr; \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$$

4. Решить задачу Больца $\int_0^{\pi} \left(\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t\right) dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$.

Билет №3

1. Необходимое условие экстремума для задачи Больца (Теорема).
2. Постановка задачи оптимального управления в форме Понтрягина. Основные понятия.
3. Решить задачу Лагранжа $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr; \quad \ddot{x} + x = u, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
4. Решить задачу с подвижными концами $\int_0^T \dot{x}^3 dt \to extr; \quad x(0) = 0, \quad T + x(T) = 1.$

Билет №4

1. Необходимое условие экстремума простейшей задачи (Теорема).
2. Правило решения задачи оптимального управления (в форме Понтрягина).
3. Решить задачу Лагранжа $\int_0^1 u^2 dt \to extr; \quad \ddot{x} - x = u, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
4. Решить задачу с подвижными концами $\int_0^T (\dot{x}^2 + x^2) dt \to extr; \quad x(0) = 0, \quad x(T) + T + 1 = 0.$

На подготовку ответов на вопросы и решение задач студенту отводится 60 минут. За ответы на теоретические вопросы студент может получить максимально по 25 баллов. За выполнение практических заданий студент может получить максимально 50 баллов. Минимальный балл для экзамена – 50.

1 вопрос	2 вопрос	Задача 1	Задача 2	Сумма
0 – 25	0 – 25	0–25	0–25	0–100

Перевод баллов в оценку:

Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
90-100	80-89	50-79	0-49